核心素养观下的主题单元起始课教学实践

——以复数单元起始课为例

孙军波

（浙江省温岭中学 317500）

1 引言

开展基于核心素养的教学，需要把一些具有逻辑联系的知识点放在一起进行整体设计，即进行整体的单元教学设计，这样更有利于培育学生的核心素养. 单元教学是撬动课堂教学转型的一个支点，以单元为整体进行设计可以更好地理解知识从何处来，到何处去这一问题，通过单元教学对学生进行数学核心素养的培养和提升是高效的.

在实际教学中，实施整体单元的教学设计，需要综合考虑各种影响和制约高中数学教学的有关因素或环节，特别是单元思想和现行教材的关系，班级授课制和整体教学设计落地的关系. 从单元与现存教材的关系角度看，一类是不改变教材内容结构与编排，以单位为单元，强化教学内容分析、学生认知分析、教学目标制定、教学过程设计的整体性，使课时与课时之间的联系更加紧密，例如本文中的复数；一类是以单元为单位，需要适当调整教材的内容结构，重新强化内容之间的逻辑关系，更好地突出教与学的整体性与系统性. 另外受现行班级授课制的限制，较难在每节课中体现出单元的整体思想. 笔者认为落实单元教学思想的关键是单元起始课的教学设计研究，起始课作为知识单元教学的序曲，是单元整体的引导性材料，它具有介绍本单元的内容、地位和作用的功能，是展现单元整体思想的较好载体.

2 单元起始课概念界定

基于学生最近发展区与发展学科核心素养切实需要的教学目标，根据课标、教材、学情在结构上的联系，进行重新组合的“单元”第一课. 单元更多的是课程/学习单位，非内容单位. 单元的划分标准不同，重组的单元也是不同的. 若大单元与章的内容、结构保持一致，起始课有一定的相似性，但是单元起始课更突出整体(内容和研究方法的整体性)关联性思维，它是以提升数学核心素养、促进学生深度学习为目标，即生本与培育核心素养为主；单元起始课与传统的章起始课有很多共同之处，但章节起始课更多地关注将要学习什么知识、如何学、学了有什么用，即文本为主.

3 复数单元起始课再设计的缘由

复数在人教 A 版选修 2－2 第三章，新教材中位于主题三第二部分，在原有的数系的扩充、复数的概念和复数的代数形式的四则运算基础上，补充了复数的三角形式等[1]. 近几年高考对复数的考查基本围绕复数代数形式的四则运算，使得师生对复数知识单元不够重视，仅仅考虑使用公式进行简单计算，因此教师和学生对数系的扩充过程及复数的几何意义的认识较为模糊.

在数学史上，虚数以及复数概念的引入经历了一个曲折过程，其中充满着数学家的想象力、创造力和不屈不挠的精神，对于培育学生对数学概念和思想方法的理解有着较好的作用. 基于此我们对复数单元的起始课进行了再设计，力求找准复数概念产生的逻辑起点，揭示复数概念发展的逻辑主线，明晰定性刻画复数几何意义的必要性，把数系的扩充过程的思考作为复数概念建立的重要过程和阶段来处理，重在探究数系扩充的原则、从而建立复数概念，同时深化对复数概念

的几何意义与四则运算间的联系.

4 前期分析

4.1 教学内容分析

4.1.1 知识产生的背景与固着点

复数起源于负数开平方问题，在复数诞生的早期，数学家并不愿意接受，认为这种数只是存在于“幻想之中”，直至德国数学家高斯用复平面上的点表示复数后并用向量解释了复数的运算，复数才被广泛接受. 虽然有种说法虚数是为了解没有实数解的二次方程式而想象出来的，但是事实可能并非如此，如果仅是二次方程的话，只要加一个规定“如果判别式是负数的话，二次方程没有实数解”，这样就可以结束讨论了，并没有为了要二次方程有解而创造复数的强烈动机. 在历史上，利用数学方法认真思考复数，就是在研究三次方程的解法时，因此三次方程求根公式中出现负数开方的情形是复数知识产生的一个固着点.

4.1.2 知识生长的过程与阶段

复数概念的形成经历了如下几个阶段：一是使用卡当公式求解三次方程，发现实数解需要用到不存在的虚数来表示；二是近百年时间数学家并不承认复数，但在各式各样的数学问题之间它越来越活跃；三是到了十九世纪，高斯提出了复平面的见解，阐述了复数加法与乘法的几何意义，至此复数理论才比较完整和系统地建立起来了. 需要注意的是，几何意义是复数概念得以形成与发展的重要依据.

4.1.3 知识建构的策略与方法

复数概念是根据现实世界的实际需求和数学内部之间的矛盾(复数在实数集内无法开方)而产生的. 其建构所用到的主要策略与方法：一是类比思想，即类比有理数、实数等数系扩充过程，探索推理复数模型；二是数形结合思想，根据复数与向量一一对应的关系，以形助数、以数论形，构建完整的复数理论.

4.1.4 知识间的联系与结构分析

向量是复数的几何表示，通过向量的运算定义，完善复数的概念和运算的几何解释；另一方面复数仅是二维向量，严格地讲复数与复平面内以原点为起点的向量构成一一对应关系，但两者并非完全等价. 两者在线性运算方面是等价的，但在乘法运算方面存在不同.

4.1.5 知识间的要点与本质

复数的本质是二元数，对一元实数的推广，是代数研究对象从一维空间到二维空间的推广，因此实数是复数的另一个固着点.

4.1.6 知识的学科意义与教学价值

复数已被广泛应用于流体力学、信号分析等学科，因此复数有着深厚的物理背景. 复数是复变函数论、量子力学等学科中最基础的对象和工具，具有十分重要的学科价值和教育价值. 复数概念建立过程中所蕴含的类比思想，可以培养学生的数学抽象素养、推理素养. 在复数的基础上，英国数学家哈密顿构造了四元数模型，并导致了物理学中著名的麦克斯韦方程的产生[2].

4.2 学生认知分析

4.2.1 学生认知基础分析

学生已具有一些数的概念并能理解数集之间的包含关系，掌握了实数范围内的一些运算法则和运算律，有了数系扩充的一些经验. 其次学生掌握了一元二次方程等的求解方法以及方程的解的概念，了解乘方运算与开方运算的互逆关系、数学逻辑用语以及推理与证明的相关知识. 最后是学生已掌握向量的概念及运算的一些相关知识.

4.2.2 学生认知障碍分析

在生活中缺少复数的现实物理背景，学生缺乏直观感受，对其很陌生且较难理解；另一方面学生缺乏从整体上重新审视数系发展的过程，不知道数系为什么要扩充，以及它与生产生活及方程求解之间的关系，对数的生成和发展的历史规律没有深刻的认识，也缺少深入的思维习惯.

4.2.3 学生认知风格分析

多数学生习惯于被动学习而不是主动的研究学习，习惯于独立学习而不是合作学习，习惯于机械解题而不是研究问题.

4.2.4 学生认知差异分析

由于学生认知基础等方面的差异，因此应允许不同的学生以不同的方式学习，获得不同的结果，即允许部分学生以接受、模仿的方式学习.

4.3　教学目标及素养解读

基于前期的内容分析、学生的认知分析，确定教学目标及其素养解析如下：

(1)借助方程，对复数概念的引入背景与必要性有比较清楚的认识，从实数到复数，从具体到抽象，学会掌握研究扩充数系的思路，理解复数的概念，了解数系扩充的基本规则．学会用类比的思想解决问题的思路和领域，感悟解决数学问题的思想方法，提升学生的逻辑推理能力；

(2)通过对复数不同形式的研究，厘清解决问题的思路和思想，积累创建数学模型的经验，提升学生建模的能力；

(3)通过课后对三元数和四元数相关材料的阅读和研究，开阔学生的视野，培养学生提出问题、思考策略、解决问题的能力．

4.4　教学设计片段

4.4.1　片段 1　呈现背景，提出问题

问题 1　已知三次方程 $x^3+px+q=0$ 的其中一个根的求根公式：

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}}$$

请根据该公式求解方程 $x^3-3x=0$ 的一个根．

分析：根据公式可得其中一个根为 $\sqrt[3]{\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{\sqrt{-1}}$，这个表示的应该是根 0．但 $\sqrt{-1}$ 和已有的知识产生冲突，如果方程的解是客观存在，那么实数就需要进行扩充．

设计说明：教材从二次方程出发有其合理性，新的教学设计找准复数概念产生的逻辑起点，通过设置情景冲突，可以有利激发学生学习复数的欲望，也比较自然地进入复数的学习之中．还原历史帮助学生理解复数引入的必要性，进而了解实际需求和数学内部的矛盾在数系扩充中的作用．

4.4.2　片段 2　联想激活，寻求方法

问题 2　数系的扩充可能遵循哪些原则？联想回忆我们曾学习了哪些数的集合与运算？数系每一次扩充后哪些方程从无解变有解？

分析：从自然数扩充到了整数，实现了方程 $x+1=0$ 有解，从而实现了减法运算的封闭，从整数扩充到了有理数，实现了方程 $2x+1=0$ 有解，从而实现了除法运算的封闭．通过类比自然数扩充到整数，整数扩充到有理数到实数的过程，获得数系扩充可能遵循的原则，首先是为了解决方程中产生的问题；其次扩充的数系应该包含原来的数系，并希望原有的运算及运算律仍能成立．

设计说明：数系扩充原则的讨论这一问题是寻求方法的关键，通过回顾从自然数集逐步扩充到实数系的过程，为实数系的扩充提供了类比对象，也为如何扩充数系指明了方向．

4.4.3　片段 3　归纳抽象，建立概念

问题 3　规定虚数 i 后，通过实数与 i 进行四则运算可以产生哪些新的形式的数？这些新的数一般形式可能是什么？

分析：新数集可能有这样一些形式的数，$1+\mathrm{i}$、$1-\mathrm{i}$、$2\mathrm{i}$ 等，所以新数的一般形式可能为 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$．把集合 $C=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R}\}$ 中的数，即形如 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫做复数，其中 i 叫做虚数单位．全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$ 叫做复数集．用字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$，这一表示形式叫做复数的代数形式．其中的 a 与 b 分别叫做复数的实部和虚部．

设计说明：根据上述讨论的数系扩充原则，由实数和新引入的虚数单位进行四则运算，尝试构建复数的一般形式并命名，学生经历复数概念的产生过程，为课后三元数的证伪研究提供思路借鉴和研究方向．

4.4.4　片段 4　运用新知，解决问题

问题 4　下列方程在复数范围内是否有解，如果有解，请求出方程所有的解．

(1)$x^2+9=0$；(2)$x^2+x+1=0$；

(3)$x^3-1=0$．

学生活动：利用配方、因式分解、求根公式等在复数范围内求解这三个方程．

分析：由实数扩充到复数，失去了实数集 $\mathbf{R}$ 全区域的性质，复数集 $\mathbf{C}$ 只能是一个半区域了，即 $\mathbf{C}$ 中元素无大小可言，但是 $\mathbf{C}$ 是代数闭域，任何代数方程在 $\mathbf{C}$ 中必定有根．

设计说明：增加了在复数范围内求解二次方程等问题，可以更好地理解复数模型建立的意义，感悟数系扩充后带来的飞跃．学生通过经历

数学知识的假设、论证和完善过程，体会数系的扩充可以解决问题的同时，也可能会失去原数系的一些性质.

4.4.5 片段5 多元联系，拓展深化

问题5 实数的顺序特征使得它和数轴上的点一一对应，复数由实部和虚部组成，能否在实数轴的基础上为复数寻找一个几何意义？

分析：复数的虚部为零时，复数就成为了一维的实数轴，所以当虚部不为零时，可以考虑类似于坐标系一样引进一个虚轴，复数的实质是二元数，具体复数的几何意义在下一课中详细讲解.

设计说明：复数概念的建立缺乏生活背景，通过复数的几何意义猜测，人们可以尝试感受到复数的存在，在起始课中为下一节几何意义的引进埋下伏笔. 历史上复数的几何意义是建立复数模型的关键，不仅为后续复数的运算和法则提供依据，也导致了三元数的提出和否定

4.4.6 片段6 回顾反思，拓展问题

问题6 为什么要建立复数模型？能否描述一下复数模型的研究过程？

问题7 如果说复数是二元数，那是否存在$a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$这样形式的数？你能否借鉴本节课复数的研究过程创建一个三元数的模型？请查阅资料，是基于什么原因人们最后认可了复数模型，而三元数$a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$却没有？

设计说明：复数的本质是二元数，对一元实数的推广，是代数研究对象从一维空间到二维空间的推广，因此实数是复数的另一个固着点. 二元数的本质一旦揭示，那三元数的提出就显得很自然也很合理，更为重要的是数学研究需要考虑证实，也需要考虑证伪，通过证伪可以更好地佐证其合理性. 回顾反思不仅是为了总结，更多的是展望下一步研究，拓展数学的问题. 通过课后研究三元数的问题，可以发现定义三元数的乘法时，无法明确地定义ij的值，若假设$\mathrm{ij}=0$，则$\mathrm{i}(\mathrm{ij})$与$(\mathrm{ii})\mathrm{j}$无法相等，这样就可以清楚地了解复数运算建立的必要性. 同时也为后续四元数的研究打开了道路. 也正是为了解决三元数模型中的缺陷，英国数学家哈密顿构造了四元数模型，并导致了物理学中著名的麦克斯韦方程的产生. 这样的课后作业，比传统的思考题更能拓展学生的视野，了解数学知识的研究过程，培养学生提出问题、解决问题的能力.

5 总结和启示

史宁中先生提到“开展基于核心素养的教学，应当把一些具有逻辑联系的知识点放在一起进行整体设计. 无论把这个整体称为‘单元’还是‘主题’，总之，要把这些内容融为一体进行教学设计.”[3]开展基于核心素养的单元起始课教学设计是落实单元思想的第一步，本文的教学设计为“高中数学研究型教学实践与探索”的延伸研究，采用的设计思路称为研究型单元教学设计，实现以生为中心、教学过程即研究过程的目的，在研究过程中感悟知识所蕴含的数学基本思想，该成果曾获2018年国家级基础教育教学成果二等奖.

有效的单元起始课的关键是教师需要掌握数学知识的来龙去脉，才能真正体会复数发展过程中数学家的想象力、创造力和不屈不挠的精神. 本课例在浙江师范大学的尖锋论坛上进行了教学实践，从课堂的达成度和学生的访谈来看，都取得了不错的效果，与会教授认为实践中对教材的处理其实质是将数学史融入教学的整个环节，虽然未提及数学史的知识，确将复数知识的诞生、发展、演变在课中做了很好的揭示. 通过对复数单元起始课的研究，也可以发现对于复数，学生缺乏生活中的直观感受，较难理解复数的概念及运算定义的合理性，所以我们认为有效的单元起始课还需要基于对学生层次的了解，基于学生认知基础等方面的差异，允许不同的学生以不同的方式学习，获得不同的结果.

参考文献

[1] 吕天玺，王光明. 基于数学核心素养的“复数”教学设计[J]. 数学通报，2018，57(6)：39－43

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018：123

[3] 史宁中，林玉慈，陶剑，郭民. 关于高中数学教育中的数学核心素养—史宁中教授访谈之七[J]. 课程·教材·教法，2017，(4)：8－14

[4] 李昌官. 高中数学研究型教学实践与探索[J]. 课程·教材·教法，2018(1)：86－90