一道动点类竞赛不等式的加强与推广

费红亮[1] 曾善鹏[2]

(1.杭州高级中学 310003;2.杭州电子信息职业学校 310021)

1 结论部分

本文符号约定如下:P 是$\triangle ABC$内任意一点,a,b,c 是三角形三边,R 表示$\triangle ABC$外接圆半径,S 表示$\triangle ABC$的面积,P 向三边 BC,AC,AB 作高线分别交边于 D,E,F 三点,PD,PE,PF 分别用 r_1,r_2,r_3 表示,PA,PB,PC 分别用 R_1,R_2,R_3 表示.

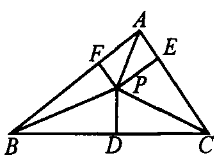

图 1

2018年韩国数学竞赛中给出了如下一道几何不等式.

不等式 P 是$\triangle ABC$内任意一点,S_1,S_2,S_3 分别表示$\triangle PBC$,$\triangle PAC$,$\triangle PAB$ 的面积,求证:

$$\frac{S_1}{R_1^2}+\frac{S_2}{R_2^2}+\frac{S_3}{R_3^2}\geqslant\frac{S}{R^2} \qquad (1)$$

首先将不等式(1)进行加强得到:

结论 1 P 是$\triangle ABC$内任意一点,O 为$\triangle ABC$外接圆圆心,S_1,S_2,S_3 分别表示$\triangle PBC$,$\triangle PAC$,$\triangle PAB$ 的面积,求证:

$$\frac{S_1}{R_1^2}+\frac{S_2}{R_2^2}+\frac{S_3}{R_3^2}\geqslant\frac{S}{|R^2-OP^2|} \qquad (2)$$

注 因为 O 为$\triangle ABC$外接圆圆心,所以 $R>OP$,从而有 $\frac{S}{|R^2-OP^2|}=\frac{S}{R^2-OP^2}\geqslant\frac{S}{R^2}$,所以结论1是不等式(1)的加强形式.

接着将不等式(1)进行 n 元推广得到:

结论 2 P 是$\triangle ABC$内任意一点,S_1,S_2,S_3 分别表示$\triangle PBC$,$\triangle PAC$,$\triangle PAB$ 的面积,自然数 $n\geqslant1$,则

$$\frac{S_1^n}{R_1^2}+\frac{S_2^n}{R_2^2}+\frac{S_3^n}{R_3^2}\geqslant\frac{3^{1-n}S^n}{R^2} \qquad (3)$$

实际上,我们可以得到不等式(1)加强的推广形式,其结论如下:

结论 3 P 是$\triangle ABC$内任意一点,O 为$\triangle ABC$外接圆圆心,S_1,S_2,S_3 分别表示$\triangle PBC$,$\triangle PAC$,$\triangle PAB$ 的面积,自然数 $n\geqslant1$,则

$$\frac{S_1^n}{R_1^2}+\frac{S_2^n}{R_2^2}+\frac{S_3^n}{R_3^2}\geqslant\frac{3^{1-n}S^n}{|R^2-OP^2|} \qquad (4)$$

注 易知结论1和结论2是结论3的推论,因此要证明以上三个结论,只要证明结论3即可.

2 引理部分

引理 1(惯性矩不等式)[1] 若 x,y,z 为任意实数,则

$$(x+y+z)(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2)\geqslant yza^2+zxb^2+xyc^2 \qquad (5)$$

当且仅当 $x:y:z=ar_1:br_2:cr_3$ 取到等号.

引理 2(Gergonne 公式)[2] P 是$\triangle ABC$内任意一点,O 为$\triangle ABC$外接圆圆心,P 向三边 BC,AC,AB 作高线分别交边于 D,E,F 三点,S,$S_{\triangle DEF}$ 分别表示$\triangle ABC$,$\triangle DEF$ 的面积,则

$$S_{\triangle DEF}=\frac{|R^2-OP^2|}{4R^2}\times S.$$

3 证明部分

结论 3 的证明 由引理1知,若取 $x=ar_1,y=br_2,z=cr_3$ 时,不等式(3)取到等号,即

$$(ar_1+br_2+cr_3)(ar_1R_1^2+br_2R_2^2+cr_3R_3^2)$$
$$=(br_2\times cr_3)a^2+(cr_3\times ar_1)b^2+(ar_1\times br_2)c^2.$$

由几何恒等式 $ar_1+br_2+cr_3=2S$ 以及 $S=\frac{abc}{4R}$ 可以将上述恒等式化为

$$ar_1R_1^2+br_2R_2^2+cr_3R_3^2$$
$$=\frac{(br_2\times cr_3)a^2+(cr_3\times ar_1)b^2+(ar_1\times br_2)c^2}{ar_1+br_2+cr_3}$$

万方数据

$$=\frac{abc(r_2r_3a+r_3r_1b+r_1r_2c)}{2S}$$

$$=2R(r_2r_3a+r_3r_1b+r_1r_2c),$$

所以得到恒等式

$$ar_1R_1^2+br_2R_2^2+cr_3R_3^2=2R(r_2r_3a+r_3r_1b+r_1r_2c) \tag{6}$$

因为 $PD\perp BC, PE\perp AC, PF\perp AB$,

所以有 $\angle A+\angle EPF=\pi, \angle B+\angle DPF=\pi$,

$\angle C+\angle DPE=\pi$,

结合正弦定理以及三角形面积公式可得

$$2R(r_2r_3a+r_3r_1b+r_1r_2c)$$
$$=2R(2r_2r_3R\sin A+2r_3r_1R\sin B+r_1r_2R\sin C)$$
$$=4R^2(r_2r_3\sin A+r_3r_1\sin B+r_1r_2\sin C)$$
$$=4R^2(r_2r_3\sin\angle EPF+r_3r_1\sin\angle DPF+r_1r_2\sin\angle DPE)$$
$$=4R^2(2S_{\triangle EPF}+2S_{\triangle DPF}+2S_{\triangle DPE})$$
$$=8R^2S_{\triangle DEF},$$

所以得到

$$2R(r_2r_3a+r_3r_1b+r_1r_2c)=8R^2S_{\triangle DEF} \tag{7}$$

所以由恒等式(6)(7)可得

$$ar_1R_1^2+br_2R_2^2+cr_3R_3^2=8R^2S_{\triangle DEF} \tag{8}$$

因此,由柯西不等式、幂平均不等式、恒等式(8)以及引理 2 可得

$$\frac{S_1^n}{R_1^2}+\frac{S_2^n}{R_2^2}+\frac{S_3^n}{R_3^2}=\frac{S_1^{n+1}}{S_1R_1^2}+\frac{S_2^{n+1}}{S_2R_2^2}+\frac{S_3^{n+1}}{S_3R_3^2}$$
$$\geqslant\frac{(S_1^{\frac{n+1}{2}}+S_2^{\frac{n+1}{2}}+S_3^{\frac{n+1}{2}})^2}{S_1R_1^2+S_2R_2^2+S_3R_3^2}$$
$$\geqslant\frac{[3^{\frac{1-n}{2}}(S_1+S_2+S_3)^{\frac{n+1}{2}}]^2}{S_1R_1^2+S_2R_2^2+S_3R_3^2}$$
$$=\frac{3^{1-n}(S_1+S_2+S_3)^{n+1}}{\frac{1}{2}ar_1R_1^2+\frac{1}{2}ar_1R_2^2+\frac{1}{2}ar_1R_3^2}$$
$$=\frac{3^{1-n}S^{n+1}}{4R^2S_{\triangle DEF}}$$
$$=\frac{3^{1-n}S^{n+1}}{|R^2-OP^2|\times S}$$
$$=\frac{3^{1-n}S^n}{|R^2-OP^2|},$$

结论 3 得证.

4 猜想部分

在结论 2 中,分母的次数是 2 次,如果将 2 次换成任意正整数次,结论是否还成立,关于结论 2,我们提出了如下猜想.

猜想 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点,S_1,S_2,S_3 分别表示 $\triangle PBC,\triangle PAC,\triangle PAB$ 的面积,自然数 $n\geqslant1,m\geqslant1$,则有

$$\frac{S_1^n}{R_1^m}+\frac{S_2^n}{R_2^m}+\frac{S_3^n}{R_3^m}\geqslant\frac{3^{1-n}S^n}{R^m}.$$

参考文献

[1]M. S. Klamkin. Geometric Inequalities via the Polar Moment of Inertia[J]. Math. Mag. 1975(48) , 44~46

[2]匡继昌. 常用不等式(第四版)[M]. 济南:山东科学技术出版社,2010:284

(上接第 47 页)

我国基础教育课程改革正处于以“立德树人”为宗旨,以发展学生“核心素养”为目标,以实现课堂教学转型为重点的“再出发”阶段,与新时代背景相适应的高中数学教学的中心问题是如何将数学核心素养落实于课堂,落实在考试评价中. 2019 年高考数学全国卷贯彻新高考改革的有关要求,把“立德树人,人才选拔,教学导向,促进学生健康成长和综合素质提高”作为命题的出发点和落脚点,试题涉及的学科知识全面,内容丰富,体现了数学的科学价值和理性价值,从根本上体现了素质教育的要求,无论从考试的选拔性功能,还是对中学教学的引导作用来看,都是出色的试卷.

参考文献

[1] 刘博智,柯进,万玉凤,董鲁皖龙. 强调数学应用,考查关键能力——教育部考试中心命题专家解析 2019 年高考数学试题[N]. 中国教育报,2019-6-8(4)

[2]中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2018

[3]任子朝,陈昂,赵轩. 数学核心素养评价研究[J]. 课程・教材・教法,2018(5):116-121

[4]刘世伟. 参数方程和极坐标方程[M]. 上海:上海教育出版社,2000

[5]李大潜. 漫话 e[M]. 北京:高等教育出版社,2009

[6]林崇德. 21 世纪学生发展核心素养研究[M]. 北京:北京师范大学出版社,2016

万方数据