

25 届高三天域联考压轴题的一种放缩视角

一. 典例. (25 届高三天域联考) 黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 与数论中的素数分布定理和黎曼猜想密切相关.

$\zeta(s)$ 是这样定义的: 记 $\operatorname{Re}(s)$ 为复数 s 的实部, $\psi_k(s) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} (n \in \mathbf{N}^*)$ 当

$\operatorname{Re}(s) > 1$ 时, 有 $\zeta(s) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_k(s)$, 故 $\psi_k(s)$ 对 $\zeta(s)$ 的研究具有重要意义.

(1) 已知对任意正整数 n , 都存在唯一的整数 a_n 和 b_n , 使得 $n = a_n \times 2^{b_n}$, 其中 a_n 为奇数,

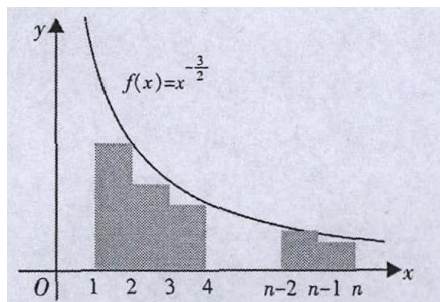
b_n 为自然数, 求 $\sum_{n=1}^{10} (a_n + b_n)$;

(2) 试判断是否存在正整数 k , 使得 $\psi_k(1) = 2024$, 并证明你的结论;

(3) 求证: $\psi_k\left(\frac{3}{2}\right) < 3$.

解析: (3) 如图:

$$\begin{aligned}\psi_k\left(\frac{3}{2}\right) &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < 1 + \int_1^k \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = 1 + \int_1^k x^{-\frac{3}{2}} dx = 1 + \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^k \\ &= 3 - \frac{2}{\sqrt{k}} < 3.\end{aligned}$$



二. 基本命题原理

1. 定积分的定义:

一般地, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 每个小区间长度为 Δx ($\Delta x = x_i - x_{i-1}$), 在每个小区间

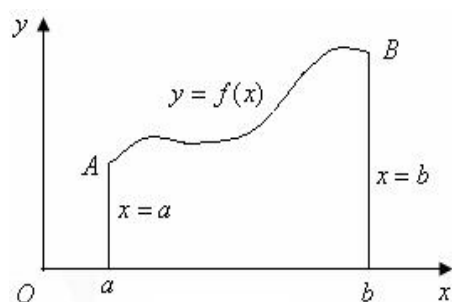
$[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ($i = 1, 2, \cdots, n$), 作和式: (凌晨讲数学)

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

如果 Δx 无限接近于 0 (亦即 $n \rightarrow +\infty$) 时, 上述和式 S_n 无限趋近于常数 S , 那么称该常

数 S 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分. 记为: $S = \int_a^b f(x) dx$.

2. 定积分的几何意义: 当 $f(x) \geq 0$ 时, 由前述可知, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$, 两直线 $x = a$, $x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积.



3. 微积分基本定理: 如果 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 并且 $F'(x) = f(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

4. 定积分的运算性质: 假设 $\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx$ 存在

$$(1) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

作用: 求定积分时可将 $f(x)$ 的系数放在定积分外面, 不参与定积分的求解, 从而简化 $f(x)$ 的复杂程度.

$$(2) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

作用: 可将被积函数拆成一个个初等函数的和, 从而便于寻找原函数并求出定积分.

$$(3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ 其中 } a < c < b$$

作用: 当被积函数含绝对值, 或者是分段函数时, 可利用此公式将所求定积分按区间进行拆分, 分别求解.

(4) 若 $f(x)$ 具备奇偶性, 且积分限关于原点对称, 则可利用奇偶性简化定积分的计算

$$(4.1) \text{ 若 } f(x) \text{ 为奇函数, 则 } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 (a > 0)$$

(4.2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx (a > 0)$

二. 典例分析

例 1. (广东省 25 届高三入学调研考试) 如果函数 $F(x)$ 的导数为 $F'(x) = f(x)$, 可记为

$\int f(x)dx = F(x)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 表示曲线 $y = f(x)$, 直线

$x = a$, $x = b$ 以及 x 轴围成的“曲边梯形”的面积. 如: $\int 2x dx = x^2 + C$, 其中 C 为常数;

$\int_0^2 2x dx = (2^2 + C) - (0 + C) = 4$, 则表 $x = 0, x = 1, y = 2x + C$ 及 x 轴围成图形面积为 4.

(1) 若 $f(x) = \int (e^x + 1)dx$, $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = -x + 6$ 所围成图形的面积;

(3) 若 $f(x) = e^x - 1 - 2mx$, $x \in [0, +\infty)$, 其中 $m \in \mathbb{R}$, 对 $\forall a, b \in [0, +\infty)$, 若 $a > b$,

都满足 $\int_0^a f(x)dx > \int_0^b f(x)dx$, 求 m 的取值范围. (凌晨讲数学)

解析: (1) $f(x) = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C$, 其中 C 为常数. 而 $f(0) = 2$, 即 $1 + 0 + C = 2$,

所以 $C = 1$, 所以 $f(x) = e^x + x + 1$.

(2) 联立 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases}$, 解得 $x_1 = -3, x_2 = 2$, 当 $-3 < x < 2$ 时, $-x + 6 > x^2$, 令

$g(x) = -x + 6 - x^2$, $F(x) = \int g(x)dx = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3 + C$, 则围成的面积

$$S = \int_{-3}^2 g(x)dx = F(2) - F(-3) = \left(-2 + 12 - \frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{9}{2} - 18 + 9\right) = \frac{125}{6}$$

(3) 令 $F(x) = \int f(x)dx$, 由题意可知, $\forall a, b \in [0, +\infty)$, $a > b$, 满足

$F(a) - F(0) > F(b) - F(0)$, 即 $F(a) > F(b)$, 即 $F(x) = \int f(x)dx$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调

递增, 进而 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立, $e^x - 1 - 2mx \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立. 由于 $x > 0$,

即 $\frac{e^x - 1}{2x} \geq m$, 令 $g(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$, 则 $g'(x) = \frac{2xe^x - 2e^x + 2}{4x^2}$,

令 $h(x) = 2xe^x - 2e^x + 2$, $h'(x) = 2xe^x \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$h(x) \geq h(0) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$, 进而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $g(x) \geq \frac{1}{2}$, 所以 $m \leq \frac{1}{2}$.

例 2. 一般地, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 用分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$

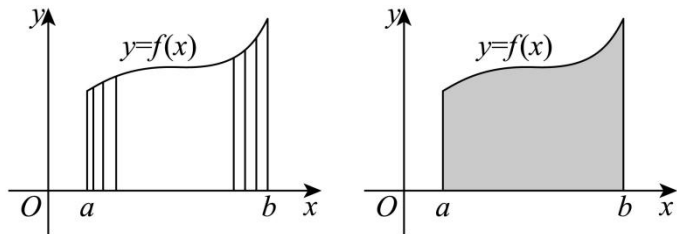
将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间. 每个小区间长度为 $\Delta x (\Delta x = x_i - x_{i-1})$. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上

任取一点 $\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 作和式 $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$. 如果 Δx 无限接近于 0

(亦即 $n \rightarrow +\infty$) 时, 上述和式 S_n 无限趋于常数 S , 那么称该常数 S 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,$

$b]$ 上的定积分, 记为 $S = \int_a^b f(x) dx$. 当 $f(x) \geq 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的几何意义表示由曲线

$y = f(x)$, 两条直线 $x = a, x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积. 如下图所示:



若函数 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

(1) 求 $\int_1^2 (e^x + 2x) dx$;

(2) 设函数 $f(x) = \ln(x+1), g(x) = x \cdot f'(x) (x \geq 0)$.

①. 若 $f(x) \geq mg(x)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

②. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = g(a_{n-1})$, 利用定积分的几何意义, 证明: $\sum_{i=2}^n a_i < \ln n < \sum_{i=1}^n a_i$.

解析: (1) $\int_1^2 (e^x + 2x) dx = (e^x + x^2) \Big|_1^2 = e^2 + 4 - e - 1 = e^2 - e + 3$;

(2) ① $f(x) \geq mg(x)$ 恒成立, 得 $\ln(x+1) \geq \frac{mx}{x+1} (x \geq 0)$ 恒成立. 令 $\varphi(x) = \ln(x+1) - \frac{mx}{x+1}$, 则

$\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{m}{(x+1)^2} = \frac{x+1-m}{(x+1)^2}$. 当 $m \leq 1$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $\varphi(0) = 0$, 所以 $\varphi(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立. 当 $m > 1$ 时, 当 $x \in (0, m-1)$ 时, 有 $\varphi'(x) < 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, m-1)$ 上单调递减, 又 $\varphi(0) = 0, \varphi(x) < \varphi(0) = 0$ 在 $(0, m-1)$ 恒成立, 与 $\varphi(x) \geq 0$

矛盾．综上所述， $m \leq 1$ ．

②由 $a_n = g(a_{n-1})$ ，可得 $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ ，所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$ ．即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，1 为

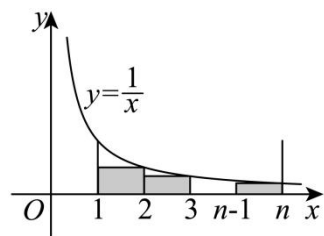
公差的等差数列，则 $\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) = n$ ，所以 $a_n = \frac{1}{n}$ ， $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ 是由曲线 $y = \frac{1}{x}$ ，两直线

$x=1, x=n$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积．而 $\sum_{i=2}^n a_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 表示图一阴影所示各矩

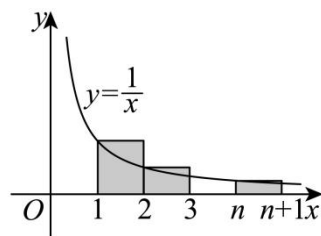
形的面积和，所以 $\sum_{i=2}^n a_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$ ，不等式的左边成立．

$\sum_{i=1}^n a_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 表示图二阴影所示各矩形的面积和，所以

$\sum_{i=1}^n a_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$ ，不等式的右边成立．



图一



图二