第一讲 组合开端——分类分步计数

一、知识解析

加法原理

假设做一件事情中会出现 n 种不同的情况，其中第 i 种情况中有 m_i 种不同方法完成。那么这件事情完成的不同方法数共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$。

【例 1】一个解放军打了 3 枪，成绩为 21 环（每枪的成绩仅可能为 1 到 10 之间的整数环），问三枪成绩的所有可能情况。

乘法原理

假设做一件事情要依顺序做 n 步，其中第 i 步有 m_i 种不同方法完成。那么这件事情完成的不同方法数为 $m_1m_2\cdots m_n$ 种。

【例 2】用 012345 能组成多少个相邻数位数字不相同的五位数？

排列数与组合数

排列数 A_m^n：从 m 个数中选出 n 个排成一列，方法数记为 A_m^n，则 $A_m^n = m\times\left(m-1\right)\times\ldots\times\left(m-n+1\right)$。特别地，记 $A_n^n = n!$。

组合数 C_m^n：从 m 个数中选出 n 个组成一个“整体”，方法数记为 C_m^n，则 $C_m^n = \dfrac{m\times\left(m-1\right)\times\ldots\times\left(m-n+1\right)}{n!}$。

证明：

【简例 3-1】（1）从 10 个人中选出 3 人评选“三好学生”，问几种选法？
（2）从 10 个人中选出 3 人“叠罗汉”，问有几种“叠罗汉”的方式？

【简例 3-2】（1）10 支球队进行单循环赛（即两两之间比赛一场），问赛程中有几场比赛？
（2）10 支球队进行主-客单循环赛（即两两之间主客场各赛一场），问赛程中有几场比赛？

【简例 3-3】问凸 n 边形有几条对角线？

【简例 3-4】在 4×4 表格中填入 4 个“1”（每格至多填一个），问填法有几种？

【简例 3-5】将 3 个完全相同的黑球和 7 个完全相同的白球排成一行，问有几种排法？

二项式定理

二项式定理：$\left(a+b\right)^{n}=C_{n}^{0}a^{n}b^{0}+C_{n}^{1}a^{n-1}b^{1}+...+C_{n}^{n-1}a^{1}b^{n-1}+C_{n}^{n}a^{0}b^{n}$。

证明：

【例 4】求值：$C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+...+C_{n}^{n}$

二、例题精讲

【例 5】将一个四棱锥的每一个顶点染上一种颜色，并使同一棱的两端点异色，如果有 m $(m\geq 4)$ 种颜色可供选择，那么不同的染色方法总数是多少？

【例 6】(2017 清华暑校）在一个 4×4 的方格表中填入 8 个 1，使得任意每行或者列都有 2 个 1，问填法的总数？

【例 7】（错排问题）5 个人写了 5 封贺卡，现在每人拿一封，求所有人不拿到自己写的贺卡的情况总数。

【例 8】（2015 北大博雅）登梯时规定每次只能跨上 1 级或者 2 级楼梯，今欲登上 10 级楼梯，求不同走法的种数。

【例 9】甲、乙、丙三人练习排球传球，同一人不能连续接球，从甲发球连续 10 次传球又回到甲的不同的传球路线有多少种？

【例 10】在 6×6 的表中停放 3 辆完全相同的红色和 3 辆完全相同的黑色车，每一行每一列只有一辆车，每辆车只占一格，问共有几种停放方法？

【例 11】在一个 3×3 的表格中填入 1~9，要求每一行的数从左至右递增，每一列的数从左至右递增，问一共有几种填法？

【例 12】从一个 5×4 方格表的左下角方格走到右上角方格，规定每次走只能选择向上或者向右走一格，不能回头。问一共有几种走法？

【例 13】（2018 清华领军）整数 x, y, z 满足 $|x|+|y|+|z|=5$，问这样的 (x, y, z) 有几组？

第二讲 计数进阶——更多例子

一、知识解析

有重复元素的排列

若n个元素由k类不同的元素组成，每类的任意两个元素是不可区分的，记每类的元素个数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$，那么n个元素的全排列数为$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$。

证明：

【例 1】求$\left(a_1+a_2+...+a_k\right)^n$的展开式合并同类项后，$a_1^{x_1}a_2^{x_2}...a_k^{x_k}$的系数。

相邻元素捆绑策略

【例 2】7 人站成一排，其中甲乙相邻且丙丁相邻，共有多少种不同的排法？

不相邻问题插空策略

【例 3】一个晚会的节目有 4 个舞蹈，2 个相声，3 个独唱，舞蹈节目不能连续出场，则节目的出场顺序有多少种？

定序问题

【例 4】7 人排队，其中甲乙丙 3 人顺序一定，共有多少种不同的排法？

平均分组问题

【例5】将6本不同的书按下列分法，各有多少种不同的分法？

（1）分给学生甲3本，学生乙2本，学生丙1本；

（2）分给甲、乙、丙3人，其中1人得3本、1人得2本、1人得1本；

（3）分给甲、乙、丙3人，每人2本；

（4）分成3堆，一堆3本，一堆2本，一堆1本；

（5）分成3堆，每堆2本.

（6）分给甲、乙、丙3人，其中一人4本，另两人每人1本；

（7）分成3堆，其中一堆4本，另两堆每堆1本.

分配问题隔板策略

【例6】现有10个市三好的名额，分配给7所学校，每校至少有1个名额，问名额分配的方法共有多少种？

【例7】现有10个市三好的名额，分配给7所学校，学校的名额可以为0个，问名额分配的方法共有多少种？

圆排列与项链数

从 n 个不同元素中取 m 个不同元素排在一个圆周上，称为从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的圆排列，其排列数为 $\dfrac{n!}{m\cdot(n-m)!}$。

证明：

【例 8】将 n 个不同的珍珠串成一串项链，问有几种情况？

二、例题精讲

【例 10】给定平面上的五个点 A,B,C,D,E，其中任意三点不共线。由这些点连成四条线段，五个点中的每个点都至少是一条线段的端点，则不同的连线方式有____________种

【例 11】求不定方程 $x_1+x_2+x_3+3x_4+3x_5+5x_6=21$ 的正整数解的组数。

【例 12】有长为3^n（$0 \le n \le 1006$）的线段各两条，则由这 2014 条线段能构成____________个不同大小和形状的三角形（全等视为相同大小和形状，相似不算）

【例 13】一次圆桌会议，八个座位互不相同，8 个人先后入座，且入座时均想坐在邻座无人的座位（首选某个两侧均没有人入座的空座位；其次，再选择两侧只有一人已入座的空座位；若某人入座时，每个空座位两侧均已有人入座，则他只能任选其中之一入座）.这八个座位被先后入座的顺序有__________种

【例 14】将集合 $M=\{1,2,...,9\}$ 分成 A,B,C 三个非空子集，满足

（1）$|A|,|B|,|C|$ 成等差数列，其中 $|A|<|B|<|C|$（$|A|$ 表示集合 A 的元素个数）;

（2）A,B,C 的元素和均为平方数.则总共有____________种不同的分法.

第一讲课后作业

第一部分 基础知识梳理

重做课堂例题，回顾课堂笔记，并用以下问题作为基本知识的复习。

【1】（2018 清华文科营）在 3×3 的表格中填入 1~9（每个数字各出现一次），要求每行从左至右递增，每列从上至下递增，4 的位置给出（参考下表），问表格有几种可能的填法？

	4	

【2】（2017 清华暑校）已知整数 a,b,c 为三角形的三边长，其中 $a \le b \le c$，且 $b=10$，问三边长的可能情况数。

第二部分 基本方法实践

【3】恰有两个数码相同的三位数一共有几个（十进制下）？

【4】（2016 清华领军）将 16 个数：4 个 1、4 个 2、4 个 3、4 个 4 填入一个 4×4 的矩阵中，要求每行、每列恰有 2 个偶数，问共有几种填法？

【5】问方程 $x+2y+3z=20$ 有几组非负整数解？

【6】$1,2,3,\ldots,n$ 排成一排，定义“好排列”为：排列中的任何一个数，或者大于排在它前面的所有的数，或者小于排在它前面的所有的数。记“好排列”的个数为 $f\left(n\right)$，求 $f\left(10\right)$。

【7】（2015 清华领军）从 1,2,3,4,5 中挑出三个不同数字组成五位数，其中有两个数字各用两次，例如 12231，问这样的五位数有几个？

【8】（染色问题的递推）在课堂的例题 5 中，将四棱锥扩展为八棱锥，其余条件不变，求所有的染色情况数（写出递推式即可）。

第三部分 拓展问题选做

【9】（2017 北大 514）若 $a,b,c\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$（即 a,b,c 均取值为 $\pm3,\pm2,\pm1,0$），问直线 $ax+by+c=0$ 共有多少种可能性？

【10】某次测试共有六道题，甲乙丙三人答卷。已知对于任意两人，恰有一道题被他们都答对，却没有一道题被三个人都答对。比如甲答对 124 题，乙答对 135 题，丙答对 23 题。问三个人答卷的可能情况数。

【11】有序数对 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 中，a_1,a_2,a_3,a_4 均为 1-9 之间的正整数。记 $N(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 表示此数对中不同数的个数，例如 $N(1,1,2,2)=2$，$N(1,2,3,1)=3$，则所有的 $N(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 的平均值为？

第三讲 符号语言——集合与映射

【例】367 人参加一场聚会，证明：其中必有两个人同月同日生。
【学生习作】如果没有两个人同月同日生，那么每一天就至多只有一个人生日，这样算上闰年的情况，一年全部排满也至多只有 366 人，矛盾！

【例】一个数表，每一行的和称为“行和”，每一列的和称为“列和”，证明：所有行的行和之和等于所有列的列和之和。
【学生习作】所有行的行和之和，即整个数表的所有数之和。所有列的列和之和，还是整个数表的所有数之和，即证。
【推荐答案】设这个数表为 m 行 n 列的表，记 i 行 j 列的数为 a_{ij}（$1\le i\le m, 1\le j\le n$）。第 i 行的行和即 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$，第 j 列的列和即 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$。
由求和变换的性质，得

$$\text{所有行的行和} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \text{所有列的列和}$$

定义 1 集合与元素

集合是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总而成的集体。其中，构成集合的这些对象则称为该集合的元素。

元素和集合的关系

某个元素 x，或者出现在集合 A 中（称作 x 属于 A，记作 $x\in A$），或者不出现在集合 A 中（称作 x 不属于 A，记作 $x\notin A$）。

我们一般使用小写字母 a,b,x,y 等表示元素，大写字母 A,B,X,Y 等表示集合。

定义 2 集合族

以集合为元素的集合称为集合族，简称集族。集族一般用花体字母 $\mathfrak{R}\mathfrak{I}$ 等表示。

集合的书写

集合有以下三种书写方式：

① 枚举式：例如 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3,\dots,n\}$ 等。

② 概括式：例如 $A=\{i\,|\,i=1,2,3,4,5\}$，$A=\{ij\,|\,i,j=1,2,3,4,5\}$ 等。

③ 符号式：有些数集有特定的符号，如自然数集 $\mathbb{N}$，有理数集 $\mathbb{Q}$，整数集 $\mathbb{Z}$，实数集 $\mathbb{R}$ 等。

集合元素的属性

组成集合的元素有以下几点要求：

① 互斥性。集合不能有重复元素。

② 无序性。集合内部的元素不分先后顺序，如$\{1,2,3\}$与$\{3,2,1\}$相同。

③ 确定性。在用概括式书写集合时，集合的要求必须非常明确，即对于任何元素，我们都必须能给出判断，它是否属于集合。不具有确定性的集合反例："某班身高很高的人组成的集合"，但"某班身高≥ 170cm 的人组成的集合"是符合要求的。

定义 3 集合的基数

（有限）集合A中元素的数目称为集合的基数，记作$|A|$或者$card(A)$。

接下来，我们介绍集合之间的运算/关系。

定义 4 空集、子集、真子集

不含任何元素的集合称作空集，记作$\varnothing$。

称集合A为集合B的子集：如果集合A的所有元素均属于集合B，记作$A\subseteq B$。

称集合A为集合B的真子集：如果$A\subseteq B$，但$A\neq B$，记作$A\subsetneqq B$。

【例 1】已知$card(A)=n$，求A共有多少个子集（含空集）。

定义 5 集合的运算：交集、并集、差集、补集

① A,B的交集（记作$A\bigcap B$）的定义：$A\bigcap B\triangleq\{x\mid x\in A,x\in B\}$。

$A_1,A_2,...,A_n$的交集可以简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

② A,B的并集（记作$A\bigcup B$）的定义：$A\bigcup B\triangleq\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$。

$A_1,A_2,...,A_n$的并集可以简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

③ A,B的差集（记作$A-B$）的定义：$A-B\triangleq\{x\mid x\in A,x\notin B\}$。

更特殊地，如果$B\subseteq A$，此时$A-B$又可写作$A\setminus B$或者$\complement_A B$，称作"B在A中的补集"。

性质 6 集合的运算性质

对于两个有限集合A,B，成立以下性质：

① $A=(A-B)\bigcup(A\bigcap B)$；

② $A\bigcup B=A\bigcup(B-A)$；

③ 如果$A\subseteq B$，则$\complement_B A\bigcup A=B$

【例 2】已知集合 A,B,C（不必相异）满足 $A\cup B\cup C=\{1,2,3,...,2019\}$，求满足条件的有序组 (A,B,C) 的数目。

定义 7 映射、像、原像、值域

两个非空集合 A 与 B 间存在着对应关系 f 是指：对于 A 中的每一个元素 x，B 中总有唯一的一个元素 y 与它对应，就称这种对应为从 A 到 B 的**映射**，记作 $f:A\to B$。

其中，y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，记作：$y=f(x)$。x 称为 y 在映射 f 下的**原像**。集合 A 中所有元素的像的集合称为映射 f 的**值域**，记作 $f(A)$。

定义 8 单映射，满映射，一一映射

已知 $f:A\to B$，则

① 若对于 $\forall x_1,x_2\in A$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为（从 A 到 B 的）单映射，简称单射；

② 若对于 $\forall b\in B$，存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$，则称 f 为（从 A 到 B 的）满映射，简称满射；

③ 既是单射，又是满射的映射，称作双射，又称一一映射。

性质 9 单射、满射、一一映射与集合元素数目

已知 $f:A\to B$，A,B 均为有限集，

① 若 f 为单映射，则 $|A|\le|B|$；

② 若 f 为满映射，则 $|A|\ge|B|$；

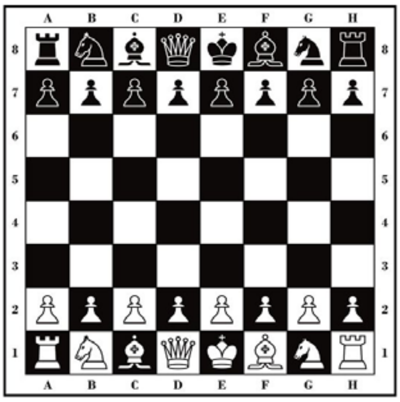
③ 若 f 为一一映射，则 $|A|=|B|$。

本章的核心：使用集合和映射符号，将很多具有直观表述的问题，做完全书面化的翻译。参考下面的例子。

【例 3】给定有限集合 A，请用集合与映射的语言，定义什么叫“给 A 排序”。

【例 4】给定有限集合 A，请用符号语言，定义什么叫“给 A 的元素配对，变成两两成对的形式”。

【例 5】如下图所示，请用集合和映射的语言，定义国际象棋棋盘中的所有黑格。



【例 6】请用集合和映射的语言转述下列问题：
求所有周长为 n，边长为整数且互不全等的三角形的个数。

【例 7】证明：方程 $x_1+x_2+...+x_m=n$ 的非负整数解 $(x_1,x_2,...,x_m)$ 的数目，和 $y_1+y_2+...+y_m=m+n$ 的正整数解 $(y_1,y_2,...,y_m)$ 的数目一样多。

【例 8】对凸 n 边形 $A_1A_2...A_n$ 的顶点进行 m 染色（即染 m 种颜色之一），满足相邻顶点不同色，记染色方法数为 s。对凸 $n+1$ 边形 $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ 的顶点进行 m 染色，满足 A_n,A_{n+1} 颜色相同，其余相邻顶点不同色，记染色方法数为 t。构造从 A 到 B 的映射 f，并证明 $s=t$。

定义 10 集合的分拆（划分、分割）

对于集合 S ，满足下列条件的 $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ 称为集合 S 的分拆：

① $S_1, S_2, ..., S_n$ 均非空集，且两两的交集为空集；② $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$

性质 11 分拆的性质

在定义 1 中，若 S 为有限集，则 $\sum_{i=1}^{n} |S_i| = |S|$ 成立。

定义 12 笛卡尔积

对于两个有限集合 $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ 和 $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ ，定义 A, B 的笛卡尔积为 $A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ 。

性质 13 笛卡尔积的元素数目

对于有限集合 $A_1, A_2, ..., A_n$ ，成立：$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$ 。

性质 14 容斥原理

对于有限集合 S ，我们用 $|S|$ 表示 S 中元素的个数，若 S_1 是 S 的子集，则 $\overline{S_1} = S \setminus S_1$ 表示 S_1 在 S 中的补集。

定理 1（容斥原理）　设 S 是有限集合，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 S 的子集，则

$$\begin{aligned}\left|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |S_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| - \cdots + \\ (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| + \cdots + \\ (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| .\end{aligned}$$

定理 2（容斥原理的对偶形式）　对任意有限集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ ，有

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| + \cdots + \\ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| + \cdots + \\ (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| .\end{aligned}$$

【例 9】某班对数学、物理、化学三科总评成绩统计如下：优秀的人数：数学 21 个，物理 19 个，化学 20 个，数学物理都优秀 9 人，物理化学都优秀 7 人。化学数学都优秀 8 人。这个班有 5 人任何一科都不优秀。那么确定这个班人数的取值范围以及仅数学优秀的人数的取值范围。

【例 10】记 $A=\{1,2,3,4,5\}$， $B=\{1,2,3\}$，求从 A 到 B 的满映射的数目。

【例 11】把 n 个不同的球放入 $r\left(n\geq r\right)$ 个不同的盒子中，每个盒子中的球数不限。求无空盒的放法总数。

【例 12】若$\{1,2,\cdots n\}$的一个排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$满足$i_1\neq 1,i_2\neq 2,\cdots,$ $i_n\neq n$，则称$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$为$\{1,2,\cdots n\}$的一个错位排列。试求$\{1,2,\cdots n\}$的所有错位排列的个数D_n。

【例 13】从所有不大于 2018 的正整数中任取 3 个，均不相邻的选法有几种？

第四讲 抽屉原理与平均值原理

一、知识解析

定义 1 高斯函数、地板函数、天花板函数

对实数 x，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，称为高斯函数。$\lfloor x \rfloor$ 称为地板函数，含义与高斯函数相同。略作变形，记 $\lceil x \rceil$ 为不小于 x 的最小整数，$\lceil x \rceil$ 称为天花板函数。

原理 1 抽屉原理

如果将 m 个物体放入 n 个抽屉内，则必有一个抽屉中至少有 $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ 个物体。

证明：

原理 2 平均值原理

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数，$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中必有一个不大于 A，也有一个不小于 A。

证明：

二、自招回溯

【例 1】从$1,2,3,\dots,100$这100个数中任意挑出51个数来，证明在这51个数中：必有 2 个数相邻。

【例 2】（2015 北大自主）从$1\sim99$中选出 50 个互不相同的整数，满足其中任两个数的和既不为99也不为 100，试分别判断这 50 个数的和是否可能为3724，3624和3524。

【例 3】将 1,2,...,10 这十个数依任意顺序排成一圈，证明：其中必有三个相邻的数，它们的和不小于 17。

三、例题精讲

【例 4】从 $1,2,\ldots,2018$ 中最多能选出多少个数组成一个集合，使得集合中任两个数的和都不能被他们的差整除？

【例 5】证明：从 1,2,3,...,100 中任取 51 个数，其中必有两个数存在倍数关系。

【例 6】（Ramsey 定理）平面上六点满足任意三点不共线，把任意两点的连线段染成红色或蓝色，证明：必存在同色三角形。

【例 7】记 $S=\{1,2,3,...,2019\}$， $A\subseteq S$ 满足 $\forall x\in A$， $15x\notin A$ 。求 $|A|$ 的最大值。

【例 8】49 名学生解 3 个问题，每题的得分是 0 分到 7 分的整数。证明：存在两名学生 A A 和 B，对每个问题，A 的得分不低于 B 的得分。

【例 9】（1）设 $a_1,...,a_n$ 是正整数，求证：其中存在若干个数，和是 n 的倍数。

（2）设 $n\geq 4$，$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是区间 $(0,2n)$ 内互不相同的正整数。证明：存在 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的一个子集，它的所有元素之和被 $2n$ 整除。

【例 10】设 n,r 是给定的正整数，求最小的正整数 m，使将集合 $S=\{1,2,\cdots,m\}$ 任意划分为 r 个两两不交的集合 $A_1,A_2,\cdots A_r$ 后，都存在两个数 a,b 属于同一集合 $A_i\left(1\le i\le r\right)$，且 $b<a\le\frac{n+1}{n}b$。

【例 11】给定一个无理数 α 及正整数 n，求证：存在整数 p,q 使得 $|p\alpha-q|<\frac{1}{n}$ 并且 $p\neq 0$。

【例 12】（第 28 届 IMO 试题）设实数 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 满足 $x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2=1$。证明：对每个 $k\geq 2\left(k\in N^*\right)$，存在不全为零的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使 $|a_i|\leq k-1\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，且 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\leq\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$。

【例 13】在半径为 1 的圆周上，任意给定两个点集 A,B，它们都由有限多条互不相交的弧组成，B 中每段弧长为 $\frac{\pi}{m}\left(m\in N^{*}\right)$，$A^{j}$ 表示将 A 绕圆逆时针方向旋转 $\frac{j\pi}{m}\left(j\in N^{*}\right)$ 所得的集合。证明：存在正整数 k，使 $l\left(A^{k}\cap B\right)\geq\frac{1}{2\pi}l\left(A\right)l\left(B\right)$。这里 $l\left(M\right)$ 表示 M 中所有弧的长度之和。

第四讲课后作业

第一部分

整理课堂笔记，重做例题，并完成下面的问题。

【1】从$1,2,3,\ldots,100$这100个数中任意挑出51个数来，证明在这51个数中：必有2个数的差为50。

【2】在边长为1的正方形内任取9点，证明：在这9点组成的所有三角形中，必存在一个，面积不超过$\frac{1}{8}$。

【3】平面上有n（$n \geq 4$）个不同的点，两两之间连线。已知这些线段中恰有$n+1$条长度等于d。证明：其中必有一点，在它发出的线段中，至少有3条长度等于d。

第二部分

【4】（2016 清华领军）从 1,2,3,...,14 中选出一些数，满足其中任意互不相同的数不能构成等差数列（所谓“等差数列”，就是相邻两数间隔相等的排列，比如 123,147,357 等）。问最多选出多少个数？

【5】在拉姆赛定理的基础之上，进一步证明：图中至少存在两个同色三角形。

【6】已知 A, B 为集合 $\{1,2,3,...,100\}$ 的两个子集，满足：

① $|A|=|B|$；② $A \cap B=\varnothing$；③ 对任意 $x \in A$，$2x+2 \in B$。

求 $|A \cup B|$ 的最大值。

【7】从 1,2,3,...,2019 中删去一些数，使得剩下的数中任意数不等于其余任意不同两数的乘积，问最少删去几个数？

【8】（第 6 届 IMO）有 17 位科学家，其中每位科学家都同其他所有人通信，他们在通信中只讨论了三个题目，且每两位科学家之间只讨论一个题目。证明：至少有三个科学家，他们互相之间讨论的是同一个题目。

【9】设 100 个非负实数的和为 1，证明：可以将它们适当地排列在圆周上，使得将每两个相邻数相乘后，所得的 100 个乘积之和不大于 0.01。

第三部分

【10】已知$S=\{1,2,3,\ldots,2000\}$，M为S的子集且M中任意两数的差不等于 5 或 8，求$|M|$的最大值。

【11】（1990 日本数学奥林匹克）设$a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$是$n+1$个正整数（$n>3$），满足：$a_0<a_1<\ldots<a_n\le 2n-3$。证明：存在不同的正整数$i,j,k,l,m\in\{1,2,\ldots,n\}$，使$a_i+a_j=a_k+a_l=a_m$。

第 6-7 讲 对应方法

一、知识解析

倍满映射

从 A 到 B 的满映射 f 满足 B 中每一个元素都有且仅有 k 个原像，则 $|A|=k|B|$。

二、例题精讲

【例 1】设凸 n 边形的任意三条对角线不交于形内一点，求它的对角线在形内的交点总数。

【例 2】设 $n\equiv 1(\bmod 4)$ 且 $n>1$，$P=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 为 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的任意排列，k_P 表示使下列不等式成立的最大下标 k：

$$a_1+a_2+\ldots+a_k<a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n$$

对于一切排列 P，求 k_P 的总和。

【例 3】设集合 $S_n=\{1,2,\cdots n\}$，对 S_n 的子集 Z，记 Z 中所有数之和为 Z 的容量，这里约定空集的容量为 0。若 Z 的容量为奇数，则称 Z 为 S_n 的奇子集，否则称为偶子集。

（1）证明：S_n 的奇子集与偶子集的个数相等；

（2）证明：$n\ge 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和。

【例 4】（第 25 届美国数学奥林匹克）n 项长为 0,1 的序列 $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ 称为长为 n 的二元序列。a_n 为无连续三项成 0,1,0 的长为 n 的二元序列的个数，b_n 为无连续四项成 0,0,1,1 或 1,1,0,0 的长为 n 的二元序列的个数。证明：对每一个正整数 n，$b_{n+1}=2a_n$。

【例 5】一次聚会有 40 个人参加，已知其中任何 19 人都有唯一的公共朋友。（约定甲是乙的朋友的同时乙也是甲的朋友，任何人不是自己的朋友）证明：存在一个由 20 个人组成的集合 T_0，使对任意 $a \in T_0$，从 T_0 中去掉 a 后，剩下 19 个人的公共朋友不是 a。

【例 6】（2018 年北大博雅）记 S_n 表示边长为整数、周长为 n 的互不全等的三角形个数。证明：$S_{2018} = S_{2015}$。

【例 7】设 n 是正整数，由 n 个正整数（可以相等）组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为“满数列”，如果它满足如下条件：对任意正整数 $k\geq 2$，如果 k 是该数列中的一项，那么 $k-1$ 也是该数列中的一项，且 $k-1$ 在数列中的位置在 k 最后一次出现的位置的前面。对每个 n，求所有“满数列”的个数。

【例 8】（2015 年全国高中数学联赛）设 $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$，其中 $A_1,\ldots,A_n$ 是互不相同的有限集合 $(n\geq 2)$，满足对任意的 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\cup A_j\in S$。若 $k=\min|A_i|,k\geq 2$，证明：存在 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，其属于 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 中的至少 $\dfrac{n}{k}$ 个集合。

对应方法 课后作业

【1】（1991 全国高中数学联赛改编）设集合 $M=\{1,2,\dots,2019\}$，对 M 的任意非空子集 X，令 α_X 表示 X 中最大数与最小数（可以是同一个数）之和，求所有 α_X 的算术平均值。

【2】将边长为 a 的正三角形各边 n 等分，过各分点在三角形内作边的平行线段，将该等边三角形完全分割成边长为 $\dfrac{a}{n}$ 的小正三角形。求其中边长为 $\dfrac{a}{n}$ 的小菱形的个数。

【3】（第 32 届中国国家集训队测试题）圆周上有 $n\ (\geq 6)$ 个点，每两点连一条线段，其中任意三条线段在圆内不共点，于是任意三条两两相交的线段构成一个三角形，求这些线段所确定的三角形的总数。

【4】有 $n \geq 4$ 名选手 $A_1A_2...A_n$ 参加数学竞赛，其中有些选手是互相认识的，而且任何两个不相识的选手都恰好有两个共同的熟人。若已知选手 A_1A_2 认识，但它们没有共同的熟人，证明：他们的熟人一样多。

第 8 讲 极端原理

极端原理

（1）有限个实数中一定有最大数和最小数；
（2）无限个正整数中必有最小值。

一、例题精讲

广义的极端思想：枪打出头鸟

【例 1】琼斯先生和琼斯太太举办了一次聚会，共有 n 对夫妇参加（包括琼斯夫妇）。聚会开始时，部分人之间会相互握手，同一对夫妇之间不会握手。统计发现，除了琼斯先生之外，所有人握手次数两两不同。问琼斯太太握了几次手？

极端性的作用：其他状态不能更极端

【回顾】$x<[x]+1$。

【回顾】设 $n\equiv 1 \pmod 4$ 且 $n>1$，$P=(a_1,a_2,...,a_n)$ 为 $\{1,2,...,n\}$ 的任意排列，k_P 表示使下列不等式成立的最大下标 k：

$$a_1+a_2+...+a_k<a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_n$$

【例 2】任给一个 m 行 n 列的实数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

一次操作是指同时改变某一行或某一列的所有数的符号，其余数均不变。证明：可以经过有限次操作，使得每一行，每一列的所有数之和均非负。

存在性问题的新解——极端性构造

【例 3】（**Sylvester** 定理）给定平面上不全在一条直线上的 n 个点，则必有一条直线恰经过这 n 个点中的两个点。

【例 4】有三所学校，每所学校有 n 名学生，已知任意一名学生认识其它两所学校学生的总数都是 $n+1$。证明：每所学校都存在一名学生，使这三名学生互相认识。

锋利的极端性

【例 5】设集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 与集合 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是集合 M 的两个划分，且满足对任意两个交为空的集合 $A_i,B_j\left(1\le i\le n,1\le j\le n\right)$，有 $\left|A_i\cup B_j\right|\ge n$。证明：$\left|M\right|\ge\dfrac{n^2}{2}$。

【例 6】设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$， φ 是 I 的一些三元子集组成的集族，满足 φ 中任意两个元素至多有一个公共元。证明：存在 I 的一个子集 X，满足（1） φ 的任何元素不是 X 的子集；（2） $|X| \geq \left[\sqrt{2n}\right]$。

【例 7】在 2000×2000 的表格中，每格填上 1 或 -1。已知表格中所有数之和非负，证明：可以找到 1000 行和 1000 列，这些行和列交叉处的数之和不小于 1000。

【例 8】设 X 是有限集合，n_0 是给定的正整数，法则 f 使 X 的每一个偶子集 E（元素个数为偶数的集合称为偶子集）都对应一个实数 $f\left(E\right)$，满足下列条件：

(1) 存在 X 的一个偶子集 D，使 $f\left(D\right)>n_0$；

(2) 对 X 的任意两个不相交的偶子集 A B，有 $f\left(A\cup B\right)=f\left(A\right)+f\left(B\right)-n_0$。

证明：存在 X 的子集 P，Q，使

(a) $P\cup Q=X,P\cap Q=\varnothing$；

(b) 对 P 的任意非空偶子集 S，有 $f\left(S\right)>n_0$；

(c) 对 Q 的任意偶子集 T，有 $f\left(T\right)\le n_0$。

第 8 讲课后作业

【1】在 2×5 的数表中，第一行各格内分别填入数字 0、1、2、3、4，请在第二行的五个空格中各填入一数，使得你所填的每一个数是上一行中对应格内的数在下一行中出现的次数。

【2】平面上给定 $2n-1\left(n>2\right)$ 个点，其中任意三点都至少有两点距离小于 1，证明：可以找出其中 n 个点位于某个半径为 1 的圆内。

【3】某次会议有 A、B 两个代表团参加，现知每位 B 团的成员都至少与 A 团的一位成员握过手，而 A 团中的任何人都没有与 B 团中的所有成员握过手。试证：一定可以从 A 团中找到两人 a1、a2，从 B 团中找到两人 b1、b2，使得 a1 与 b1，a2 与 b2 握过手，而 a1 与 b2，a2 与 b1 没握过手。

【4】草场上有 15 个小朋友在玩球，初始时每人手上有一个球。已知任意两人的距离皆不相等，且每个小朋友均把自己手里所有的球抛向距离自己最近的那个小朋友。证明：抛球之后，一定有一个小朋友手上没有球。

【5】n（$n \geq 3$）名乒乓球选手进行单打比赛，若干场后，任意两名选手赛过的对手恰好都不完全相同。试证：总可以从中去掉一名选手，使余下的选手中任意两名选手已赛过的对手恰好都不完全相同。

【6】直线上分布着 $2k-1$ 条白色线段和 $2k-1$ 条黑色线段，已知任何一条白色线段都至少与 k 条黑色线段有公共内点（即交点），并且任何一条黑色线段都至少与 k 条白色线段有公共内点。证明：可以找到一条白色线段与所有黑色线段有公共内点，也可以找到一条黑色线段与所有白色线段有公共内点。

【7】称平面上的一个点集是“好的”，如果其中任意三个点不能构成等边三角形的三个顶点。设S是平面上由n个点构成的集合，求证：存在S的子集T，使得$|T| \geq \sqrt{n}$，且T是好的。

【8】一次乒乓球单循环赛一共有n（$n \geq 3$）名选手，所有比赛结束后已知其中没有全胜的人。证明：一定可以找出三名选手 A、B、C，满足 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A。

第 9-10 讲 算两次原理

算两次/富比尼原理（版本一）

对于同一组对象，用两种方式计数，结果一样。

【例 1】证明：$C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$。

笛卡尔积

对于两个有限集合 $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ 和 $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$，定义 A,B 的笛卡尔积为 $A\times B=\{(a_i,b_j)\mid a_i\in A,b_j\in B\}$。

算两次/富比尼原理（版本二）

在笛卡尔积的定义中，进一步定义 $C_i=\{(a_i,b)\mid b\in B\}$（$i=1,2,...,m$），$D_j=\{(a,b_j)\mid a\in A\}$（$j=1,2,...,n$），则 $\sum_{i=1}^{m}|C_i|=\sum_{j=1}^{n}|D_j|=|A\times B|$。

柯西不等式（简单版本）

$n\left(x_1^2+...+x_n^2\right)\geq\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2$。

模型一 组合几何中的边与角

【例 2】一张正方形纸内有 1000 个点，这些点和正方形的顶点中任意 3 点不共线。然后在这些点及正方形顶点之间连一些线段，将正方形全部分成小三角形（以所连线段及正方形的边为边，且所连线段除端点外没有公共点），问一共连有多少线段？一共有多少三角形？

模型二 图论中的边和角

已知若干点 $A_1, A_2, ..., A_n$（称作“顶点”），其中某些点之间连有线段（称作“边”），这就构成一个“图”。

很多问题实质上就是“图”的模型。例如 n 个人，其中部分人之间相互认识。把 n 个人视作 n 个顶点，相互认识视作连线，这就得到了“图”模型。

顶点 A_i 发出的线段数称为顶点 A_i 的“度”，记作 d_i。设图中有 l 条线段，则

$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2l$。

【例 3】某次聚会有 n 个人参加，其中有一些人之间认识（假定认识是相互的）。已知对于任意两个人，只有至多一人和这两人都认识。证明：互相认识的人至多 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{n^2} + \frac{n}{4}$ 对。

【例 4】一个图中 n 个顶点和 l 条边，已知图中不存在三角形，证明：$l \le \frac{\sqrt{3}}{6} n^2 + \frac{n}{4}$。

模型三 元素-集合从属关系表

【例 5】已知 $A_1,A_2,...,A_n$ 为有限集，设 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x_1,x_2,...,x_m\}$，记 $\Re_j=\{A_k\mid x_j\in A_k\}$（$j=1,2,...,m$），证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|=\sum\limits_{j=1}^{m}|\Re_j|$。

【例 6】在一个 7×7 方格表中，选出一些方格涂黑。已知黑格中任意四个的中心点不构成（边平行于 7×7 方格表的）矩形，求黑格个数的最大值。

【例 7】已知集合 $M=\{x_1,x_2,\dots,x_{4n+3}\}$，它的 $4n+3$ 个子集 $A_1,A_2,\dots,A_{4n+3}$ 具有以下性质：

① M 中每 $n+1$ 个元素恰属于唯一一个子集 A_j（$1\le j\le 4n+3$）；

② $|A_i|\ge 2n+1$（$i=1,2,\dots,4n+3$）。

证明：任意两个子集 A_i,A_j 恰有 n 个公共元。

【例 8】平面内给定 n 个不同的点，证明：其中距离为单位长的点对数少于 $\dfrac{n}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n^3}$。

【例 9】设 A_i（$i=1,2,\dots,n$）均为 r 元有限集合，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$，k 为给定的正整数。已知 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 中任意 k 个的并集等于 S，而任意 $k-1$ 个的并集为 S 的真子集。证明：$\left|S\right|\geq C_n^{k-1}$，并在等号成立时确定 r。

【例 10】（2016 年中国女子数学奥林匹克）求最大的正整数 m，使得可以在 m 行 8 列的方格表的每个方格中填入 C、G、M、O 这四个字母之一，并且具有如下性质：对于方格表的任意不同两行，至多存在一列，使得这两行在此列处的字母相同。

【例 11】凸 n 边形的任意 3 条对角线不交于形内一点，求这些对角线将凸 n 边形分成的区域总数。

【例 12】（**Erdos-Ko-Rado 定理**）设 $2 \le r < \frac{n}{2}$，ϕ 为 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一些 r 元子集构成的集族。如果 ϕ 中每两个元素的交非空，则 $|\phi| \le C_{n-1}^{r-1}$，等号成立当且仅当 $\phi=\left\{A \mid A \in X, |A|=r, x \in A\right\}$，其中 x 是 X 中一个固定元素。

第 9-10 讲课后作业

【1】一所学校有 b 个老师和 c 个学生，满足：

① 每个老师恰教 k 个学生；

② 对任意两个不同的学生，恰有 h 个老师同时教他们。

求证：$\frac{b}{h}=\frac{c\left(c-1\right)}{k\left(k-1\right)}$。

【2】（第 11 届 CMO）8 位歌手参加艺术节，准备为他们安排 m 次演出，每次由其中 4 位登台表演，并且 8 位歌手中任意两位同台演出的次数一样多。请设计一种方案，使得他们一共演出的次数 m 最少。

【3】（1989 年 IMO）设 n,k 是正整数，S 是平面内 n 个点的集合，满足：对 S 中的任何一个点 P，S 中至少有 k 个点与 P 的距离相等。求证：$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$。

【4】设 X 为有限集合，$A_1,A_2,\ldots,A_m$ 为其 r 元子集，且其中任意两个的交集的元素个数不超过 k。证明：$\left|X\right|\geq\frac{r^2m}{r+\left(m-1\right)k}$。

【5】由 n 个元素 $a_1,a_2,...,a_n$ 组成元素对 $p_1,p_2,...,p_n$ 。已知当且仅当 a_i,a_j 组成元素对时，p_i,p_j 有公共元。证明：$a_1,a_2,...,a_n$ 中每个元素恰属于两个元素对。

【6】已知 $A_1,A_2,\cdots,A_{30}$ 都是 $\{1,2,\cdots,1990\}$ 的子集，每个 A_i 中恰有 660 个元素。证明：存在两个集合 $A_i,A_j\left(1\le i<j\le 30\right)$，使 $\left|A_i\cap A_j\right|\ge 200$ 。

【7】设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是前 n 个正整数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。令 f_k 为此序列中 a_k 右边小于 a_k 的数的个数， g_k 为此序列中 a_k 左边大于 a_k 的数的个数。证明： $\sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} g_k$ 。

【8】设正整数 $n \geq 2$ ，将一个 $(4n-3)\times(4n-3)$ 的方格表中的每个方格染上红蓝两色之一，定义 $k\times l$ 子式是由任意 k 行与 l 列（不必相邻）相交得到的 kl 个方格。证明：一定存在该方格表的一个 $2\times n$ 子式，其中所有小方格同色。

【9】设 $n \geq 2$，对于任何正整数 k，求最小的正整数 $f(k)$，使有 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$（不必不同），满足以下条件：

(i) $|A_i|=k(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) $A_i \cap A_{i+1}=\varnothing(i=1,2,\cdots,n, A_{n+1}=A_1)$；

(iii) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|=f(k)$

第 11-13 讲 数学归纳法

一、知识解析

归纳公理：

如果正整数集的子集S满足：$1\in S$ 且对 $\forall k\in S$ ，$k+1\in S$ ，则 $S=N^*$。

对话 1 归纳公理的理解：多米诺骨牌 你可以利用“多米诺骨牌”来理解归纳公理（非常精辟而且有意思）：$\forall k\in S$ ，$k+1\in S$ ，说的就是前一张骨牌倒了，会带动后一张骨牌倒。$1\in S$ 说的就是第一张骨牌倒了。于是就像多米诺骨牌一样，从第一张开始一张带着一张，整个正整数集全倒了。

第一数学归纳法：

把“$\in S$”看成某个命题的成立性，归纳公理就是第一数学归纳法的原理，具体如下：

记$P(n)$表述了一个对任意正整数n都成立的命题，则它的证明可由如下两步完成：

① $P(1)$成立；

②对任意的正整数k，$P(k)$成立可推出$P(k+1)$成立。

数学归纳法有以下常见的变式，你都可以类似地理解：

第二数学归纳法：

与第一数学归纳法相比，$P(k+1)$成立的条件从要求$P(k)$成立，加强为要求$P(1),P(2),...,P(k)$成立。

跳归纳：（此处给出的是间隔为 2 的情况）

欲证明$P(n)$成立，可按如下方式完成证明：

① $P(1)$和$P(2)$成立；

②对任意的正整数k，$P(k)$成立可推出$P(k+2)$成立。

跳归纳常用于奇偶分离的情形，奇数推奇数，偶数推偶数。

螺旋归纳：（两个命题的配合归纳）

欲证明$P(n)$和$Q(m)$成立，可按如下方式操作：

① $P(1)$和$Q(1)$成立；

② $P(n)$成立可推出$Q(n+1)$成立，$Q(n)$成立可推出$P(n+1)$成立。

螺旋归纳的本质是两个命题相辅相成的关系，而上述②可能会根据具体问题有所变化。

二维归纳：（命题与两个变量有关）

现有一个命题$P(n,m)$，欲证明它对所有正整数n,m均成立，可按如下方式完成证明：

① $P(1,m)$成立，$\forall m\in N^*$；$P(n,1)$成立，$\forall n\in N^*$；

② $P(n,m)$成立可由$P(n-1,m-1)$、$P(n-1,m)$和$P(n,m-1)$共同推出。

二、例题精讲

【例 1】“蓝眼睛岛谜团”：有一个岛，岛上有一个部落，由 1000 个居民组成。这个部落有一个禁忌：如果任何一个部落成员知道了自己眼睛的颜色，他就要在**第二天中午当着所有人的面**在部落广场上自杀。这个部落的人都具有良好的视力，他们可以看见其他所有人的眼睛的颜色，但他们无法从外界知道自己眼睛的颜色（比如照镜子，或者直接问周围的人）。

岛上居民的眼睛只有两种颜色，棕色和蓝色，这一点居民们都知道。其中有 n 个人为蓝色眼睛，另外$1000-n$ 个为棕色眼睛，但是任何居民都不知道这一点，因为他不知道自己眼睛的颜色（但他们都能看到其他所有人的眼睛颜色，也就知道其他人眼睛颜色有几个蓝色和几个棕色）。

有一天，一个外来者到这个岛访问，外来者的眼睛为蓝色。一天晚上，为了向岛上居民致谢，外来者面对所有居民发表了一个演讲，他提到：“我在这里看到和我一样的蓝色眼睛”。现在的问题是，这句话会产生什么后果？

【例 2】在一条公路上，依次坐落着 n 个村庄，每个村庄都有两个推土机，一个头向左，另一个头向右，这 $2n$ 个推土机的重量各不相同。当两辆推土机正面相撞时，重量大的总能将重量轻的推下公路，若一辆推土机 A 从后侧撞上另一辆推土机 B，则无论重量关系如何，A 总能将 B 推下公路。我们称村庄 C 能横扫村庄 D，当且仅当：在只有 C 的推土机能开动的情况下，C 的推土机可以将 D 的两辆推土机均推下公路（这个过程需要 C 的左/右推土机将介于 C、D 之间的所有村庄全部横扫）。证明：无论推土机的重量如何分布，恰存在一个村庄不会被横扫。

【例 3】（1）在 $2^n \times 2^n$ 的方格表中随意去掉一格，证明：剩下的图形一定可以用若干个“L”型（3 小格）恰好盖住它。

（2）在 1993×1993 的方格表中随意去掉一格，证明：剩下的图形一定可以用若干个“L”型（3 小格）恰好盖住它。

【例 4】设有 2^n 个球分成了许多堆。我们可以任意选甲乙两堆来按照以下规则挪动：若甲堆的球数 p 不少于乙堆的球数 q，则从甲堆中拿 q 个球放到乙堆中去，这样算挪动一次。证明：可以经过有限次挪动将所有球合并为一堆。

【例 5】设 S 是一个 2002 元集合，N 是整数，且满足：$0 \le N \le 2^{2002}$，证明：可以将 S 的所有子集染上黑色或者白色，并满足：

（1）任意两个白色子集的并是白色 （2）任意两个黑色子集的并是黑色

（3）恰好 N 个子集是白色

【例 6】初始状态下，n 块糖任意放进三个盘子里。每次操作将两个盘子各取一块糖，放入第三个盘子中。求所有的 n，使得对于任何初始状态，均存在有限次操作，糖可以被集中在一个盘子里。

【例 7】在$n\times n$棋盘中，任意k行和任意l列的公共部分称为它的“子片”，并称$k+l$为它的半周长。假如若干个半周长不小于n的子片共同覆盖了棋盘的整条主对角线，证明：这些子片所覆盖的方格数不小于棋盘总方格数的一半。

【例 8】（2010 年西部数学奥林匹克）

求证：对于任何非空有限 n 元集合 A，可将 A 的所有子集排成一列 $A_1, A_2, ..., A_{2^n}$，使得每两个相邻的子集恰好相差一个元素。

【例 9】（2012 年中国西部数学奥林匹克）

设 E 是一个给定的 n 元集合，$A_1,A_2,\ldots,A_k$ 是 E 的 k 个两两不同的非空子集，满足：对任意 $1\le i<j\le k$，要么 A_i,A_j 的交集为空集，要么 A_i,A_j 中一个是另一个的子集，求 k 的最大值。

【例 10】（2014 年全国高中数学联赛）

设 $S=\{1,2,...,100\}$ 。求最大的整数 k ，使得 S 有 k 个互不相同的非空子集，具有性质：对这 k 个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的**最小元素**与这两个子集中的**最大元素**均不相同。

【例 11】（2011 年国际数学奥林匹克）

给定正整数 n。有一架天平和 n 个质量分别为 $2^0, 2^1, \cdots, 2^{n-1}$ 的砝码，现通过 n 步操作逐个将砝码放上天平，使得在操作过程中，右边的质量始终不超过左边的质量。每一步操作是从尚未放上天平的砝码中选出一个砝码放上天平的两边之一，操作直至所有砝码被放上天平。求整个操作过程的不同方法数目。

【例 12】在矩形桌子上放着许多相等而不完全重合的正方形纸片，其各边都平行于桌子的边，且被分别染成 $k\left(k\geq 2\right)$ 种颜色之一。已知对于任意 k 个颜色互异的正方形，它们中都有两个可以用一枚钉子钉在桌上。证明：可以用 $2k-2$ 枚钉子将某一种颜色的所有正方形全部钉在桌上。

【例 13】设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是有限集合 X 的 n 个非空子集，且对任意正整数 $i,j\left(1\le i\le j\le n\right)$， $A_i\bigcap A_j$ 不为单元集。证明：可以将集合 X 的元素分为两类，使得每个子集 $A_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 的元素不全在同一类中。

【例 14】将 m 个相同的元素分配给 n 个不同的集合，要求每个集合至少分得一个元素，问分法种数。

【例 15】给定正整数 m,n，及正整数 $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$，满足：$x_1+\dots+x_m=y_1+\dots+y_n<mn$，求证：总可以从 $x_1,\dots,x_m$ 中选出一部分数（至少选一个，不能全选），从 $y_1,\dots,y_n$ 中选出一部分数，满足：这两组数的和相等。

【例 16】10×10 的正方形中，任意填入 1~100。用红笔圈出每一行最大的 3 个数，用蓝笔圈出每列最大的 3 个数，证明：至少有 9 个数被红蓝同时圈出。

【例 17】（2012 年“华约”自主招生测试）

记函数 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, n=1,2\cdots$，证明：当 n 是偶数时，方程 $f_n(x)=0$ 没有实根；当 n 是奇数时，方程 $f_n(x)=0$ 有唯一的实根 θ_n。

【例 18】空间给定 $2n$ （ $n \geq 2$ ）个点，其中任意 4 点不共面，它们之间连有 n^2+1 条线段，求证：这些线段至少构成 n 个三角形。

第 11-13 讲课后作业

【1】在线段 AB 两端的两个端点上，一个标以蓝色，一个标以红色。在线段中插入 n 个分点，且在各个分点上随意地标上红色或蓝色，这样就把原线段分为 $n+1$ 个不重叠的小线段，这些小线段的两端颜色不同者被称为标准线段。证明：标准线段的个数为奇数。

【2】将正 n（$n\geq 3$）边形的每个顶点染上红、绿、蓝三种颜色之一，使得任意两个相邻的顶点不同色，且每种颜色均至少出现过一次。证明：可以用一些对角线将正 n 边形剖分为 $n-2$ 个三角形，且每个三角形的三个顶点均不同色。

【3】求所有正整数 m,n ，使得 $m\times n$ 的方格棋盘可以被无重复完全分割为若干块“L”型骨牌（三小格）。
（提示：先从简单情况上手，至少先猜到答案）

【4】设 $n=2^k$ ，求证：对于任意 $2n$-1 个整数，总能从中取出 n 个数，其和为 n 的倍数。

【5】（2012 华约自招联盟）某乒乓球培训班共有 n 位学员，在班内双打训练赛期间，每两名学员都作为搭档恰好参加过一场双打比赛。试确定 n 的所有可能值并分别给出对应的一种安排比赛的方案。

【6】有一个黑盒和标号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个白盒，在 n 个白盒中共放了 n 个球。允许进行这样的操作：若标号为 k 的白盒中恰有 k 个球，则取出它们，放入黑盒和标号为 $1,2,\cdots,k-1$ 的白盒中各一个 $\left(1\le k\le n\right)$。证明：对任意正整数 n，存在唯一的一种放置方式，使得 n 个球最初全在白盒中，但可以经过有限次操作，使所有球都到黑盒中。

【7】指示板上装有若干个电灯泡，且都亮着。今有若干个按钮，可以改变与该按钮相连的所有灯泡的亮灭状态。已知对任何一组灯泡，都有一个按钮与该组中奇数个灯泡相连。证明：可以通过按动直这些按钮，熄灭所有灯泡。

第 14-15 讲 （局部）调整法和特征量

技巧 1 极端量+调整

对于达到极端的状态，局部调整就变成了“微扰”，这种干扰一定会让状态朝着极端的反方向变化，由此就能反推出极端状态的某些性质，以便解题。

【例 1】14 人进行一种日本棋循环赛，每人都与另外 13 人对弈。在比赛中没有平局，求“三角联”个数的最大值（这里“三角联”指 3 人间的比赛每人皆一胜一负）。

【例 2】（第 4 届 CMO 试题）空间有 1989 个点，其中任何三点不共线，把它们分成点数各不相同的 30 组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形，问要使三角形的总数最大，各组的点数应是多少？

技巧 2 朝向理想状态的调整

有些问题，我们在读题之后就会设想一个比较理想的状态。对于一个一般的状态，我们可以考虑它能否通过一系列的调整，变为理想状态。

【例 3】在线段 AB 两端的两个端点上，一个标以蓝色，一个标以红色。在线段中插入 n 个分点，且在各个分点上随意地标上红色或蓝色，这样就把原线段分为 $n+1$ 个不重叠的小线段，这些小线段的两端颜色不同者被称为标准线段。证明：标准线段的个数为奇数。

【例 4】有 $n\times n\left(n\geq 4\right)$ 的一张空白方格表，在它的每一个方格内任意填入 $+1$ 或 -1 两个数中的一个。现将表内 n 个既不同行也不同列的方格中的数的乘积称为一个基本项。证明：按上述规则填成的方格表，它的全部基本项的和总能被 4 整除。

有些时候，理想状态就是终点，我们可以基于终点逆向调整。

【例 5】在圆周上任意写上 49 个 1 和 50 个 0，然后进行下列操作：在两个相同的数之间写上 0，在两个不同数之间写上 1，并擦掉原有数字。不断重复前述操作，问能否经过有限次操作，使圆周上所有数都变成 0？

技巧 3 终止操作问题的特征量：死神函数

对于一个操作/变换类问题，由于操作方式和操作排序的可能性太多，我们不可能一一分类讨论处理。很多操作/变换类问题，要求解题人抓住规则下的关键特征量。

特征量的第一种作用，就是终止操作问题。

【例 6】（第 27 届 IMO）在一个正五边形的每一个顶点填上一个整数，使得所填 5 个整数之和大于零。若其中三个连续顶点对应的整数依次为 x, y, z，且中间数 $y<0$，则要进行如下调整：将整数 x, y, z 分别换成 $x+y, -y, z+y$。只要所得的 5 个整数中至少有一个为负数时，调整就要继续进行。问这种调整过程是否经过有限步后必终止？

技巧 4 否定操作可能性的特征量：不变量/不变性质

特征量的第二种作用，就是否定操作可能性。为了达到这一目的，我们一般找到某个不变量或者找到某条性质恒定成立，再比较初态末态得出矛盾。

【例 7】初始状态下，n 块糖任意放进三个盘子里。每次操作将两个盘子各取一块糖，放入第三个盘子中。求所有的 n，使得对于任何初始状态，均存在有限次操作，糖可以被集中在一个盘子里。

【例 8】一个凸 n 边形，每个顶点标上一个整数。每次操作可以任取两个相邻顶点，将其上数字均加 1 或者减 1.试问对于怎样的 n，无论最初如何标数，一定都可以经过有限次操作，使得所有数字全部相等。

【例 9】在 8×8 的国际象棋盘上的棋子“海豚星”每次只能向上或向右或向左下方走一格，问“海豚星”能否从棋盘左下角的方格出发，走遍所有方格，并且每个方格恰好一次？

技巧 5 操作步骤的极值问题

特征量的第三种作用：在至少或至多操作多少次的极值问题中，为了证明操作次数的取值范围不等式，我们仍然需要找到一个特征量，特征量单次变化不会太多或者太少，这样完成从初态到末态的变化就可估计操作步骤的范围。

【例 10】考虑 1,2,3,......,20 的排列 $\left(a_1,a_2,...,a_{20}\right)$，对此排列进行操作，每次操作对换两个数所处的位置。操作的目的是将此排列变为 $\left(1,2,...,20\right)$。设对每一个排列 $a=\left(a_1,a_2,...,a_{20}\right)$，达到目标所需要进行操作的次数的最小值为 k_a，求 k_a 的最大值。

第 14-15 讲课后作业

第一部分

【1】（2017 清华暑校）黑板上写有 1,2,…,2017 这 2017 个数。每次操作任意擦去其中的某三数 a,b,c，写上 $a+b+c$ 除以 11 的余数，问黑板上最后剩下一个数的所有可能值。

【2】在黑板上写上三个整数，然后将其中一个擦去，换上其他两个数之和与 1 的差，将这个过程重复若干次得到三个数为 17,2019,2105。问一开始黑板上写出的三个数是否可能是 2,2,2？

第二部分

【3】在线段 AB 上关于它的中点 M 对称地放置 $2n$ 个点。任意将这 $2n$ 个点中的 n 个染成红色，另 n 个染成蓝色。证明：所有红点到 A 的距离之和等于所有蓝点到 B 的距离之和。

【4】设圆周上放若干堆小球，每堆中的小球都是 3 的倍数，但各堆的球数不必相等。先按下列规则调整各堆的球数：把各堆小球 3 等分，本堆留一份，其余两份分别放入左右相邻两堆中。如果此时某堆数不是 3 的倍数，则可从布袋中取出一球或两球放入，使该堆球数是 3 的倍数，然后按上述方法继续调整。问能否经过有限次调整，使各堆的球数相等？

【5】一个 $m \times n$ 长方形表中写上正整数，可以将相邻两个方格中的两个数同时加上一个整数 k，使得所得的数为非负整数。试确定经有限步这种操作可使表中所有数均为 0 的充要条件。

【6】从数集$\{3,4,12\}$开始，每一次从其中任选两个数a,b，并用数$\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b,\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b$来代替它们，那么能否通过有限多次这样的操作，得到数集$\{x,y,z\}$，满足：$|x-4|<\frac{1}{\sqrt{3}},|y-6|<\frac{1}{\sqrt{3}},|z-12|<\frac{1}{\sqrt{3}}$。

第三部分

【7】（1994 年全国高中数学联赛）设平面点集$P=\{P_1,P_2,...,P_{1994}\}$，$P$中任意 3 点不共线，将$P$中所有点分成 83 组，使每组至少 3 点且每点恰属于一个组。然后将同一组的任意两点用线段相连，不同组的任意两点不连线段，这样得到一个图案G。不同的分组方式得到不同的图案，将图案中以P中点为顶点的三角形个数记为$m(G)$。

（1）求$m(G)$的最小值m_0；

（2）设G^*是使$m(G^*)=m_0$的一个图案，若将G^*中线段（指以P中点为端点的线段）用四种颜色染色，每条线段恰染一色。证明：存在一种染色方案，使G^*染色后，不存在以P中点为顶点的三边颜色相同的三角形。

【8】（2015 年中国女子数学奥林匹克）给定整数 $n \geq 2$。黑板上写着 n 个集合，然后进行如下操作：选取黑板上两个互相不包含的集合 A, B，擦掉它们，然后写上 $A \bigcup B$ 与 $A \bigcap B$。这称为一次操作。如此操作下去，直到任意两个集合中都有一个包含另一个为止。对于所有的初始状态和操作方式，求操作次数的最大可能值。