2010 年一道高中数学联赛题的“源”与“流”

陈 昭 亮
(陕西省西安中学，710018)

2010 年全国高中数学联赛一试第 8 题是：方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解 (x,y,z) 的个数是______.

笔者经过研究后发现，要想完整的解决本题，必须用到方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ ($n\leqslant m$，$m\in\mathbf{N}^*$) 正整数解的个数这一种重要的数学模型，为行文的方便，我们先来研究这个模型的答案.

模型 1 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的正整数解个数.

解 “构造模型法”. 设想把 m 个球排成一排，如○○○○…○○○○○○，在它们之间的 $m-1$ 个空位上任选 $n-1$ 个空位各放一个隔板，共有 C_{m-1}^{n-1} 中放法，由于被隔板分割开的球的数目分别对应着一个解中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 所取的值，这样，隔板的一种放法恰对应方程的一组正整数解. 反过来也成立. 故该方程的正整数解的个数为 C_{m-1}^{n-1}.

模型 2 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的非负整数解个数.

解 令 $x_1=x'_1-1$，$x_2=x'_2-1$，…，$x_n=x'_n-1$，则 $x'_i\in\mathbf{N}^*$ ($i=1,2,\cdots,n$)，代入原方程得 $x'_1+x'_2+\cdots+x'_n=m+n$，容易得出方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的每一个非负整数解都对应着方程 $x'_1+x'_2+\cdots+x'_n=m+n$ 的一个正整数解，这样，求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的非负整数解个数问题就转化为求方程 $x'_1+x'_2+\cdots+x'_n=m+n$ 的正整数解的个数问题，由模型 1 的结论知有 C_{m+n-1}^{n-1} 个. 故方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的非负整数解个数为 C_{m+n-1}^{n-1} (即 C_{m+n-1}^{m}) 个.

根据上面这两个模型的答案，我们来解决本文开头提出的 2010 年全国高中数学联赛一试第 8 题.

解析 由模型 1 知方程 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^{2}=2009\times1004$.

把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解 (x,y,z) 的正整数解分为三类：

(1) x,y,z 均相等的正整数解的个数显然为 1；

(2) x,y,z 中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数为 1003；

(3) 设 x,y,z 两两均不相等的正整数解的个数为 k，易知 $1+3\times1003+6k=2009\times1004$.

$\therefore$ $6k=2009\times1004-3\times1003-1=2006\times1005-2009+3\times2-1=2006\times1005-2004$，

$\therefore$ $k=1003\times335-334=335671$.

从而满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解的个数为 $1+1003+335671=336675$.

笔者在对学生进行数学竞赛辅导时发现，其实这个数学模型很重要，尤其是竞赛中涉及的求方程解的个数、计数问题、组合数学等问题时，通过全部或局部的利用上述结论，往往有助于问题的顺利解决，下面再举几个例题来加以说明.

题目 1 (2008 年全国高中数学联赛题) 将 24 个志愿者名额分配给 3 个学校，则每校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有______种.

解析 设分配给 3 个学校的名额数分别为 x_1，x_2，x_3，则每校至少有一个名额的分法数为不定方程 $x_1+x_2+x_3=24$ 的正整数解的个数，即为 $C_{23}^{2}=253$.

又在“每校至少有一个名额的分法”中“至少有两个学校的名额数相同”的分配方法有 31 种.

综上知,满足条件的分配方法共有 $253-31=222$ 种.

题目 2　(2005 年全国高中数学联赛题) 如果自然数 a 的各位数字之和等于 7,那么称 a 为“吉祥数”.将所有“吉祥数”从小到大排成一列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$,若 $a_n=2005$,则 $a_{5n}=$______.

解析　$\because$ 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=m$ 的非负整数解的个数为 C_{m+k-1}^{m}.而使 $x_1 \geqslant 1, x_i \geqslant 0\ (i \geqslant 2)$ 的整数解个数为 C_{m+k-2}^{m-1}.现取 $m=7$,可知,k 位“吉祥数”的个数为 $P(k)=C_{k+5}^{6}$.

$\because$ 2005 是形如 $\overline{2abc}$ 的数中最小的一个“吉祥数”,且 $P(1)=C_6^6=1$,$P(2)=C_7^6=7$,$P(3)=C_8^6=28$,对于四位“吉祥数” $\overline{1abc}$,其个数为满足 $a+b+c=6$ 的非负整数解个数,即 $C_{6+3-1}^{6}=28$ 个.

$\because$ 2005 是第 $1+7+28+28+1=65$ 个“吉祥数”,即 $a_{65}=2005$.从而 $n=65$, $5n=325$.

又 $P(4)=C_9^6=84$,$P(5)=C_{10}^6=210$,而 $\sum\limits_{k=1}^{5} P(k)=330$.

$\therefore$ 从大到小最后六个五位“吉祥数”依次是:70000,61000,60100,60010,60001,52000.$\therefore$ 第 325 个“吉祥数”是 52000,即 $a_{5n}=52000$.

题目 3　设集合 $P=\{1,2,3,\cdots,n\}\ (n \geqslant 7)$,$P$ 的子集 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$,其中 $a_1<a_2<a_3$,当满足 $a_3 \geqslant a_2+3 \geqslant a_1+6$ 时,我们称子集 A 为 P 的“好子集”,则这样的好子集的个数为______.

解析　与集合 P 中的数进行比较,把小于等于 a_1 的数的个数记为 x_1,大于 a_1 小于等于 a_2 的数记为 x_2,大于 a_2 小于等于 a_3 的数记为 x_3,大于 a_3 的数记为 x_4,则有 $x_1+x_2+x_3+x_4=n\ (x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 3, x_3 \geqslant 3, x_4 \geqslant 0)$,记 $y_1=x_1, y_2=x_2-2, y_3=x_3-2, y_4=x_4+1$,于是原问题等价于方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=n-3$ 的正整数解的组数,故结果为 C_{n-4}^{3}.

题目 4　(2009 年全国联赛湖北初赛题) 求不定方程 $x_1+x_2+x_3+3x_4+3x_5+5x_6=21$ 的正整数解的组数.

解析　令 $x_1+x_2+x_3=x$, $x_4+x_5=y$, $x_6=z$,则 $x \geqslant 3, y \geqslant 2, z \geqslant 1$.

先考虑不定方程 $x+3y+5z=21$ 满足 $x \geqslant 3, y \geqslant 2, z \geqslant 1$ 的正整数解.

$\because$ $x \geqslant 3, y \geqslant 2, z \geqslant 1$, $\therefore$ $5z=21-x-3y \leqslant 12$, $\therefore$ $1 \leqslant z \leqslant 2$.

当 $z=1$ 时,有 $x+3y=16$,此方程满足 $x \geqslant 3, y \geqslant 2$ 的正整数解为 $(x,y)=(10,2),(7,3),(4,4)$.

当 $z=2$ 时,有 $x+3y=11$,此方程满足 $x \geqslant 3, y \geqslant 2, z \geqslant 1$ 的正整数解为 $(x,y)=(5,2)$.

所以不定方程 $x+3y+5z=21$ 满足 $x \geqslant 3, y \geqslant 2, z \geqslant 1$ 的正整数解为

$(x,y,z)=(10,2,1),(7,3,1),(4,4,1),(5,2,2)$.

又方程 $x_1+x_2+x_3=x\ (x \in \mathbf{N}, x \geqslant 3)$ 的正整数解的组数为 C_{x-1}^{2},方程 $x_4+x_5=y\ (y \in \mathbf{N}, x \geqslant 2)$ 的正整数解的组数为 C_{y-1}^{1},故由分步计数原理知,原不定方程的正整数解的组数为

$C_9^2C_1^1+C_6^2C_2^1+C_3^2C_3^1+C_4^2C_1^1=36+30+9+6=81$.

从这个问题的研究过程中我们受到的启发是,在平时的教学和竞赛辅导中,如果能指导学生对一些经典的问题进行深入的探究,找到这类问题的“源”,就容易从会解决一个问题到会解决一类问题,这有助于提升学生思维的深刻性和广阔性.

(收稿日期:2011—03—22)