



【课堂研究】

深度引入：核心素养下数学深度教学的出发点

李忠贵

(江苏省板浦高级中学, 江苏连云港 222241)

【摘要】一节完整的课应包含三个环节：“知识从何而来”“知识是什么”“知识向何而去”。但在实际教学中，许多教师只注重第二环节的教学，而对第一、第三环节重视不够。要深刻揭示“知识从何而来”，知识引入就必须有深度，深度引入是核心素养下数学深度教学的出发点，变残缺的教学过程为完整的教学过程，变单纯的知识理解为发展核心素养取向，变单纯的科学追求为科学与文化并重，可避免知识引入中的肤浅现象，引导学生进行深度学习，并自然地引出课题。

【关键词】核心素养；深度教学；深度引入

教师只有深度教学，学生才能深度学习，数学核心素养方能在教学中落小、落细、落实。核心素养下的深度教学并非一味地追求“难”，而是深入数学本质的反思性教学、触及心灵深处的对话式教学、促进持续建构的阶梯式教学、建构深层意义的理解性教学^[1]。要深刻揭示“知识从何而来”，知识引入就必须有深度，深度引入是核心素养下数学深度教学的出发点，可有效避免知识引入中的肤浅（表演、表层、表面）现象，引导学生进行深度（真实、深层、深刻）学习，着力培育学生的数学核心素养，并自然地引出课题。下面以几节市公开课为例，谈谈笔者的一些思考。

一、知识肤浅引入的现象举隅

（一）偏离目标，缺乏必要性

在教学中，有的教师囿于自身素养，对教学内容理解不深刻，教学引入的设计缺乏深度，引例不典型，学生用已学的知识、方法就可轻松解决教师设置的问题，预设的认知冲突不存在，没有发挥教学引入这一环节应有的教学价值。

【案例1】“数学归纳法”的教学引入如下：

数列 $\{a_n\}$ 中， $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ($n \in \mathbf{N}_+$)， $a_1 = 1$ ，求 a_2 ， a_3 ， a_4 的值，并猜想该数列的通项公式。此猜想准确吗？如何证明？

该设计的本意是学生用已学知识难以求解，于是教师想通过认知冲突引出新知。但在实际教学中，学生用已学知识将递推关系式取倒数，通过构造等差数列，其实就可以轻松解决此问题。究其原因，主要是教师对教学内容缺乏深度设计，以致教学内容与教学引入脱节，无形中使教学目标发生偏航，导致新知的学习对学生缺乏吸引力，从而使教学引入失去引导的价值。

（二）偏离本质，缺乏深刻性

有的教师的教学引入千篇一律，华而不实，甚至是照本宣科，问题设置缺乏深刻性、逻辑性和导向性。学生难以进行深度探究，既无法对数学知识建构自己的理解，又难以促进思维能力和核心素养的提升。其原因在于，教学引入没有立足于数学知识的本质。

【案例2】“函数的单调性”的教学引入如下：

从生活实例出发，如某地某日气温关于时间的变化曲线、记忆的数量关于时间的遗忘曲线等，便直接引出函数的增减性（图象从左往右的升、降趋势），最后用符号语言进行刻画。

这样的教学设计容易给学生学习造成以下困惑：什么是函数性质？函数性质为什么要首先研究函数的增减性？为什么还要进一步研究函数的增减性？即为什么一定要用数学语言刻画函数的增减

【作者简介】李忠贵，高级教师，全国优秀教师，连云港市名师。

【基金项目】江苏省教育科学“十三五”规划2016年度立项课题“提升高中生数学核心素养的教学设计研究”（D/2016/02/04）



性?学生无法深刻认识这三个根本性问题,会对后续的学习造成影响。

(三) 忽视主体, 缺乏启发性

有的教学设计没有基于学生已有的数学思维,引入角度狭窄,设置的问题缺乏启发性 and 内在逻辑性,自主探究流于形式。教师常常将知识强加给学生(或者变相告诉学生),固化了学生的数学思维,窄化了学生的数学视野,教学过程显得不自然,不利于学生数学核心素养和关键能力的提升。

【案例3】“同角三角函数关系”的教学引入如下:

(1) 计算下列三角函数值: ① $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$; ② $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}$; ③ $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ$; ④ $\tan 30^\circ$ 与 $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$; ⑤ $\tan 120^\circ$ 与 $\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ}$ 。(2) 根据以上计算,你能否得到一般化的结论,并证明此结论。

上述设计从引入到三角函数公式的发现及推导仅用了4~5分钟,而余下的大量时间用于例题的讲解和学生的练习,教师将一节新授公式课变成了习题课。

(四) 偏离主题, 缺乏关联性

有的教学引入偏离主题,设置的问题情境比较复杂,且与本节课的核心知识缺乏关联性,对学生的学习造成干扰。学生不清楚教师的教学目的,师生思维难以实现同频共振,教学效益低下,学生学习的时间被白白浪费掉。

【案例4】“随机事件的概率”的教学引入如下:

教师利用二战中潜艇遇袭的事件制作课件,创设问题情境。教师在多媒体上大篇幅展示多次战争中双方的武器装备,如运输船、潜艇等;教师还大肆渲染战争紧张气氛,并称英国、美国在大西洋上的运输船队,由于缺乏护卫舰的护航,常受到德国潜艇的攻击。后来,美军将领请数学家作为参谋,数学家通过概率分析发现,舰队和潜艇相遇问题是随机事件,其实是概率问题。他们将舰队规模变大,在危险海域集体通过后,再各自驶往预定地点,结果遇袭的概率大大降低。最后教师问学生:“这是什么原因呢?”

上述设计选用情境材料过于复杂,干扰信息过多,大篇幅强调概率的重要性,对学生理解本节课的核心知识毫无帮助。因此,这样的教学引入偏离了数学教学的主题,没有太多的教学价值与效益。

二、知识深度引入的价值取向

(一) 变残缺的教学过程为完整的教学过程

喻平教授认为:“一节完整的课应该包含三个环节,‘知识从何而来’‘知识是什么’‘知识向何而去’,这是一条因果链,它反映了‘知识’产生和发展的全过程。”^[2]大量的课堂观察表明,许多教师仅仅关注了因果链的第二环节“知识是什么”,而对于第一、第三环节常常一带而过。这样的教学实际上是一种碎片化的教学,教学过程残缺,既难以让数学知识结构化,又无法培养学生的数学核心素养和关键能力。章建跃博士认为:“理解教学是教好数学的前提。”^[3]数学核心素养下的深度引入,需要教师深度研读课程标准和解读教材,对教学内容的理解要深刻、通透,从本章乃至整个高中数学来整体设计一节课的教学,提高学生的数学核心素养,变残缺的教学过程为完整的教学过程。

(二) 变单纯的知识理解为发展核心素养取向

肤浅的教学引入只注重单纯的知识理解和方法的记忆,不利于学生对知识的自主探究,难以提升学生的核心素养,无法实现深度学习。而且这样的教学方式推崇“教师的权威”,不利于凸显学生的主体地位和教学生成,难以激发学生的创造性和主动性。新课改下的高中数学教学不应过分偏重知识的追求,而应变单纯的知识理解为发展核心素养取向。教师要转变教学方法、思想观念与价值追求,通过创设恰当的教学情境,引导学生进行深度探究、自主建构、合作交流、把握本质,让学生感悟数学的内在力量和价值,促进学生的关键能力和数学核心素养的提升,落实数学学科立德树人的根本任务。

(三) 变单纯的科学追求为科学与文化并重

传统的高中数学教学过分强调其传承数学知识的价值,而忽视其数学文化内涵的挖掘,这不仅背离了当前课程改革的方向,也违背了数学学科的学科特质及价值要求。高中数学教学不仅具有传授科学知识、发展认识能力、培养科学精神等科学追求,也应关注数学文化对学生人文精神的涵育,进而促进学生心灵的成长。正如怀特海所指出的:“我们要造就的是既有文化又掌握专门知识的人才。专门知识为他们奠定起步的基础,而文化则像哲学和艺术一样将他们引向深奥高远之境。”^[4]教学引入适当地融入数学文化,如数学史教育、数学的返璞归真教育、数学美育等,渗透情感教育,培养学生



学习数学的兴趣以及解决问题的自信心和意志力,发挥数学学科传递文化价值观念和道德规范的价值功能,营造科学与人文融合的数学文化氛围,进而对学生进行文化熏陶,使其获得科学与文化素养的双重提升。

三、知识深度引入的教学策略

提升学生的核心素养是教学引入环节的一个重要任务,核心素养下高中数学的深度教学呼唤深度引入,深度引入能很好地诠释“知识从何而来”,即“为什么来”“如何来”“为什么这样来”。

(一) 认知冲突引入

认知冲突引入一般指在引入环节,教师通过巧设问题,使学生已有的认知结构与新问题或新知识之间产生对立或矛盾,可以打破学生原有的认知平衡,激发学生的学习兴趣 and 主动探究的意识,集中学生学习数学的注意力,有利于促进学生进一步把握数学本质和建构新知识,使学生在问题解决中获得核心素养和关键能力的提升。以下是案例1“数学归纳法”教学引入的改进方案。

【案例5】 (1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ (其中 $n=1, 2, 3, \dots$), $a_1=0$, 请你计算 a_2, a_3, a_4 , 并猜想其通项公式。(2) 这个猜想正确吗? 如何证明呢? 逐个验证是否可行? 为什么? 数学是求“真”的, 此问题应如何解决?

这样的教学设计, 通过巧设认知冲突, 激活了学生的数学思维, 调动了学生数学学习的积极性与创造性, 促进了学生自主探究与深度学习, 培养了学生的数学运算、逻辑推理、直观想象等素养。

(二) 知识本质引入

凸显知识的本质是数学教学的核心。知识本质引入就是在进行教学引入设计时, 需在揭示知识的本质上多花工夫, 非本质性问题的探究应淡化, 这样才能促进学生的学习由表面趋于本质, 让数学深度学习真正发生。由于教材的教学内容常常以简约、留白的学术形态呈现, 因此, 教师在进行教学引入时, 要依据学情运用教学智慧, 对教学内容进行重新开发与设计, 将其转化为教育形态, 以促进学生对知识本质的理解和把握。以下是案例2“函数的单调性”教学引入的改进方案。

【案例6】 (1) 在研究一个新的概念后, 我们常常需要学习其性质, 那么事物的性质是什么? (2) 函数最重要的研究对象为事物的“变化”, 即

当 x 增加 (或减少) 时, y 是如何变化的? (3) 结合生活的实例和已学的函数图象, 引导学生发现, 函数的图象虽然千变万化, 但其图象从左到右总会呈现上升 (或下降) 趋势, 初中对此已做过研究。(4) 利用函数 (如 $y=0.001x+4$) 图象的直观判断其上升 (或下降) 趋势可靠吗? (5) 许多函数 (如 $y=x^3-2x+3$) 图象使用已学知识无法作出, 这一特征应如何精确刻画?

这样的教学引入, 紧扣数学知识的本质, 通过设置环环相扣的真问题深度引领, 激发学生自主建构和深度探究, 追根溯源, 抽丝剥茧, 逐步将教学引向深入, 着力培养了学生直观想象、数学抽象、逻辑推理等学科核心素养。

(三) 已有思维引入

已有思维引入就是在教学引入时, 唤醒学生已有的数学思维、认知经验等, 在学生的最近发展区实施深度教学, 促进学生数学知识结构化, 建立新旧知识的内在联系, 提升教学的针对性和实效性, 进而引导学生深度学习, 真正实现学生数学核心素养和关键能力的提升。以下是案例3“同角三角函数关系”教学引入的改进方案。

【案例7】 (1) 请大家回顾任意角三角函数定义以及它在各个象限的符号。(2) 已知 $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, 且 α 为第二象限角, 求 $\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的值。(3) 求解此问题一定要使用定义法吗? 是否有一般性的解法? (4) 完成下列表格 (见表1), 并探求 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 之间的等量关系。(5) 你认为它们最基本的关系是什么?

表 1

α	0°	30°	45°	60°	120°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

这样的教学设计从已有经验出发, 数学问题逻辑连贯性强, 让学生经历数学公式产生和发展 (观察、归纳、猜想、证明等) 的过程, 着力发展学生的数学抽象、数学运算、逻辑推理等素养, 并自然地引出课题。

(四) 知识背景引入

任何数学知识 (概念、公式、规则等) 均不是凭空想象而来的, 它们是数学家为解决生产实践和



科学研究中的问题而进行理性思考和发明创造的结果。知识背景引入一般指教学引入从知识产生的背景出发,设置真实的现实情境,让学生亲身经历对数学知识再发现、再创造的过程,促进学生对知识的理解、应用和数学核心素养的提升,感悟数学的魅力和育人价值。正如史宁中教授所指出的:“数学核心素养的发展,关键在于搭建数学与现实的联系,锻炼数学的思维、语言、眼光。”^[5]

【案例8】“正弦定理”的教学引入如下:

(1) 建设高铁常常需在河面上建设桥梁,现有一条河,在河的两岸各有A、B两点,工具有测角仪和皮尺。若你在与A点同一侧的岸边,不过河,如何求出A、B两点间的距离。(2) 上述问题中,在A点同侧的岸边取一点C,测量出AC的长,以及 $\angle BAC$, $\angle BCA$ 的大小,求AB的长。(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=10$, $\angle BAC=75^\circ$, $\angle BCA=45^\circ$,求AB的长。通过问题求解,你能猜想什么结论?(4) 在 $\triangle ABC$ 中,若已知 $\angle BAC$, $\angle BCA$ 及AC,求AB的长。

这样的教学设计,揭示了知识产生的背景,让学生在建模过程中,体会“观察—归纳—猜想—证明”“特殊—一般”的思维方法,体验正弦定理再发现和再创造的历程,感悟数学的内在力量和魅力,促进学生数学建模、数学运算、逻辑推理、数学抽象等核心素养的提升。

(五) 数学文化引入

数学文化引入一般指在教学引入时,适时、适度地融入数学文化(即依据教学内容恰当地渗透数学史、数学家的成长故事、数学思想、数学美等),还原知识的生成过程,可以有效激发学生学习数学的兴趣和求知欲,拓宽学生学习的数学视野,感悟数学的力量、魅力和价值,培养学生的理性精神和核心素养。在平时的教学中,教师要学习基于数学史的数学文化等相关理论,阅读并积累相关主题的数学史素材,有助于进一步优化课堂教学,实现数学学科育人的功能^[6]。

【案例9】“数系的扩充”教学引入如下:

(1) 在实数范围内解方程 $(10-x)x=40$ 。(2) 此问题是意大利数学家卡尔丹在16世纪提出的,求出的解为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$,却让卡尔丹非常恐慌和疑惑, $\sqrt{-15}$ 是一个数吗?(3) 已学的数系

进行了几次扩充?为什么必须扩充数系?如何扩充?(4) 欲 $y^2=-15$ 成立,只需求出-15的平方根。在完成了上述内容的教学后,教师接着介绍虚数单位的产生历史,例如数学家欧拉首先将i视作虚数单位,复数概念是由德国数学家高斯定义的。

这样的教学设计,在具有逻辑连贯性的问题中融入数学文化,对复数的产生和发展过程进行复盘,激发了学生学习数学的兴趣和好奇心,提升学生学习的主动性和创造性,培养学生的理性精神,以及数学抽象、数学运算、逻辑推理等核心素养。

四、结语

数学课堂的教学引入虽然在一节课中所占的时间并不长,但它关系着这节课教学的成败和教学效益的高低,必须引起数学教师的高度重视。深度引入是核心素养下数学深度教学的出发点,它深刻诠释了“知识从何而来”,立足于学生已有的思维、认知冲突、数学知识的背景、数学知识的本质和数学文化等,引导学生“会用数学观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界”^[7],有利于深刻揭示学习新知的必要性、合理性和知识生成的自然性,有益于激发学生主动建构数学知识与自己的数学理解,有助于促进学生对数学本质的把握、核心素养的提升和后续知识的学习。

参考文献:

- [1] 李松林. 深度教学的四个基本命题 [J]. 教育理论与实践, 2017 (20): 7-10.
- [2] 喻平. 数学教学实践中的理论思维 [J]. 教育研究与评论, 2020 (1): 10-16.
- [3] 章建跃. 理解数学是教好数学的前提 [J]. 数学通报, 2015 (1): 61-63.
- [4] 怀特海. 教育的目的 [M]. 徐汝舟, 译. 北京: 生活·读书·新知三联书店, 2002.
- [5] 史宁中, 林玉慈, 陶剑, 等. 关于高中数学教育中的数学核心素养: 史宁中教授访谈之七 [J]. 课程·教材·教法, 2017 (4): 8-14.
- [6] 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的数学文化课例研究 [J]. 中小学课堂教学研究, 2021 (1): 5-9.
- [7] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

(责任编辑: 陆顺演)