

HPM 研究的框架与进展^①

王 鑫¹ 岳增成² 汪晓勤³

(1. 成都市树德中学 610031; 2. 杭州师范大学教育学院 311121; 3. 华东师范大学教师教育学院 200062)

1 引言

1972年开始作为国际数学教育大会(ICME)研究小组、1976年开始成为国际数学教育委员会(ICMI)国际附属研究小组的数学史与数学教育(History and Pedagogy of Mathematics, 简称HPM),是数学教育中成立最早且较为重要的研究领域之一.然而,直到2005年西安第一届全国数学史与数学教育会议的召开,才标志着HPM开始进入我国学术界的视野.近些年来,HPM在国内受到了广泛关注,一方面,通过中国知网检索发现,2010年以来每年与之相关的文献超过100篇,另一方面,以国内最有影响力的数学教育类期刊之一《数学教育学报》为例,2010年后载文下载频次前20的论文中,就有6篇与数学史、数学文化对数学教育的作用有关^[1].但是,目前HPM在国内的发展也存在一些问题,比如对已有研究不关注,研究方法缺乏科学性,缺少数学史家与一线数学教师的合作,缺少对学生认知发展的关注等^[2].因此,有必要梳理国内HPM的大致发展脉络,以引领我国HPM学科的发展.

2 基于实践的HPM理论框架

20世纪上叶,一些欧美数学家、数学史家、数学教育家,如F·克莱因(C. F. Klein, 1849~1925)、卡约黎(F. Cajori, 1859~1930)、史密斯(D. E. Smith, 1860~1944)、波利亚(G. Polya, 1887~1985)、弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905~1990)等大力提倡在数学教学中运用数学史,正是由于这些先驱者的不懈推动,HPM成为了国际数学教育的新思潮,并发展出了为何与如

何之探讨、教育取向之历史研究、历史相似性实证研究、教学实践与案例开发、HPM与教师专业发展、数学史融入教科书研究等研究方向.21世纪初HPM理念传入中国后,起初,高校研究者以纯数学史研究为主,并介绍一些国外HPM理论,中小学一线教师则主要通过讲述数学家的奇闻轶事来激发学生的数学学习兴趣,因此,HPM进入中国的早期阶段,理论与实践处于分离状态.在这样的大背景下,汪晓勤教授受华东师范大学原校长刘佛年教授“教育研究工作者要深入实际,参加教育工作的调查和学校的教育试验”的启示,从2007年开始扎根中小学一线,与中小学数学教师合作开发HPM课例,目前已开发100余个课例,内容涵盖代数、几何、解析几何、三角和微积分等内容.在丰富的实践经验基础之上,逐步形成了以教育取向的数学史研究和关于HPM的理论探讨为基础,以HPM课例开发为核心,包括HPM课例应用、案例教学、课例分析等在内的,具有中国特色的HPM研究体系(如图1).

关于HPM的理论探讨,主要包括“数学史的教育价值”与“数学教学中如何运用数学史”两个方面,学术界对此都缺乏统一的分析框架.

对于前者,Fauvel总结了数学教学中运用数学史可以增加学生的学习动机、使数学不那么可怕、有助于发展多元文化等15条理由^[4];Tzannakis和Arcavi从五个方面总结了数学史的教育价值:数学学习、数学和数学活动的本质、教师的背景知识、数学情感、作为文化活动的数学^[5];Gulikers和Blom从概念、文化、动机三个视角分

① 1. 本文系上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”系列论文之一. 2. 本文为2020年度成都市教育科研课题“数学抽象视野下的高中数学问题解决教学策略研究”(课题编号:CY2020YB004)的阶段性成果.

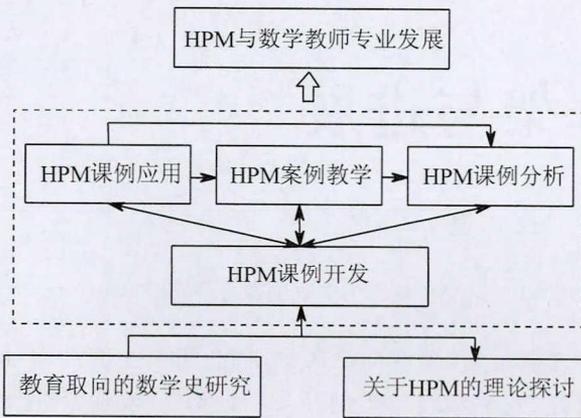
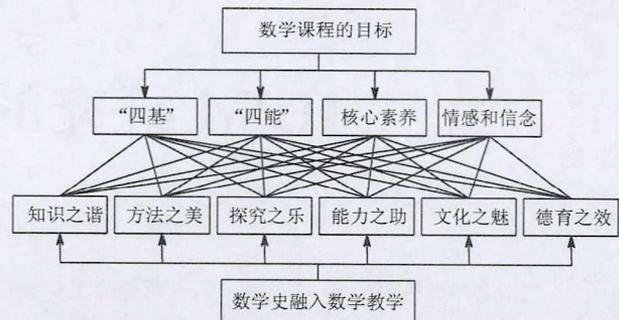


图1 国内 HPM 研究体系

别论述了数学史对于学生和教师的教育价值^[6]；Jankvist 则从“工具”和“目标”两个维度进行分类，其中“工具”又分为“认知”和“情感”两个子维度^[7]。在国外对 HPM 教育价值研究的基础上，结合我国数学教育中“四基”、“四能”、“数学核心素养”、“情感信念”等目标，构建了中国的 HPM 教育价值体系（见图 2）。下面结合初中 HPM 课例“三角形内角和”来说明数学史的教育价值。课堂伊始，教师讲述了泰勒斯（Thales，公元前 6 世纪）到朋友家做客，偶然观察到地板上镶嵌的三角形地砖的故事，并设计拼图活动，在课堂上再现泰勒斯当年探究和发现三角形内角和的过程，渗透了从特殊到一般的思想，可见数学史有助于揭示数学知识产生和发展的自然性，体现了知识之谐的价值；学生受拼图的启发，联想到辅助线的多种做法，与毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 6 世纪）、克莱罗（Clairaut，1713～1765）、欧几里得（Euclid，公元前 3 世纪）等数学家以及 19 世纪末美国教科书上的证明方法不谋而合，这些不同的证明思路体现了方法之美；数学史上的问题为学生提供了探究机会，有助于学生积累数学活动经验，获得成功的体验，体现了探究之乐；三角形内角和定理的发现和证明过程揭示了数学与现实世界之间的联系，展现了数学文化的多元性，体现了文化之魅；学生与古代数学家“对话交流”，数学家仿佛成了课堂上一名额外的学生，有助于学生树立数学学习的自信心，体现了德育之效；此外，在基于历史的活动中，学生独立思考、小组合作、数学交流等能力也有所提升，体现出了能力之助。

图2 中国的 HPM 教育价值体系的构建^[8]

对于后者，Fauvel 提出讲述过去数学家的奇闻轶事、为学生介绍新概念的历史、开展数学史课等十种具体的运用方式^[4]；Tzanakis 和 Arcavi 总结出三种方式：直接运用法、间接运用法即发生教学法、开发对数学及其社会文化背景的深刻意识^[5]；Jankvist 则归纳出另三种方式：启发法、模块法和基于历史法^[7]。在国外理论探讨的基础上，结合我国丰富的实践经验，对国外的分类方法进行了整合与改进，总结出了数学教学中运用数学史的四种方式：附加式、复制式、顺应式和重构式^[9]。下面结合高中 HPM 课例“数列的概念”来分析这四种方式的内涵及其应用。在情景引入环节中，古巴比伦泥版上的月相表、莱因德纸草书上的猫和老鼠趣味问题都是直接源于数学史上的问题，在数学史的运用方式上属于复制式，另外，教师将数学史上原本的约瑟夫问题改编为 10 人围成一圈按照特定规则点数做游戏的问题，贴近学生生活，易于学生理解和接受，该用法属于顺应式。在最后的拓展环节，教师介绍了数列与谷神星的发现之间的奥秘，去掉后对教学内容几乎没有影响，这种情况则属于附加式。又如初中“三角形中位线定理”，整节课利用三角形土地分割问题将中位线概念的产生、中位线性质的发现、中位线性质的证明串在了一起，把知识的历史发展顺序、知识的内在逻辑顺序与学生的认知发展顺序融合到了一起，是重构式运用的体现。

此外，HPM 课例开发可以与数学教师专业发展的知识、信念和能力三维目标结合在一起，其中，知识维度是目前研究的重要方向，可以用美国数学教育家鲍尔（D. L. Ball）提出的 Mathematical Knowledge for Teaching（简称 MKT）来刻画。MKT 指的是“完成数学教学工作所需要的数学

知识”,其组成成分如图3所示. HPM与MKT有着密切的关系,一方面数学史有助于MKT的完善,另一方面MKT对研究数学教育中数学史的运用也有所帮助^[10]. 下面结合高中“函数的概念”来说明数学史对教师MKT的丰富和完善作用. 教师通过系统了解函数概念的发展历史,知悉了初中函数“解析式”定义的限制性,理解了为什么需要学习函数的新定义,从而自身的SCK得以增长;知悉了学生对函数概念的理解具有历史相似性,即学生对函数概念的理解主要停留在“解析式”或“变量依赖关系”层面,这与欧拉(L. Euler, 1707~1783)早期对函数的认识相一致,有助于教师自身KCS的增长;在前两者的基础上,教师将函数概念的历史发展、学生的认知基础、函数知识的逻辑顺序融入到函数概念的教学中,自身的KCT也有所增长;另外,在这个过程中,教师查阅了函数概念的历史材料,这属于KCC的范畴.

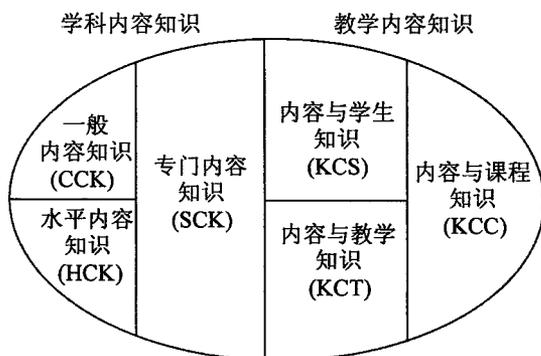


图3 数学教师MKT的结构^[11]

经过10余年的扎根,逐渐形成了基于实践的HPM理论框架,可以概括为“一个视角、两座桥梁、三维目标、四种方式、五项原则、六类价值”. 其中三维目标指教师专业发展的知识、信念和能力三个方面,四种方式即数学教学中运用数学史的方式,六类价值是课堂中运用数学史对学生而言所体现出的教育价值,这些已在上文中有所介绍. 另外,一个视角是指HPM的视角,两座桥梁是指数学史架起了数学与人文、历史与现实之间的两座桥梁,五项原则是指史料选取的原则,包括趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性,即历史材料必须让学生觉得有趣,最好含有数学故事,而非枯燥无味;必须符合史实,而非随意编造;必须符合学生的生活经验和认知基础,而非艰涩难懂;必须

切合教学目标,而非为历史而历史;必须令人耳目一新,而非老调重弹、稀松平常^[12].

3 HPM的基石:教育取向的数学史研究

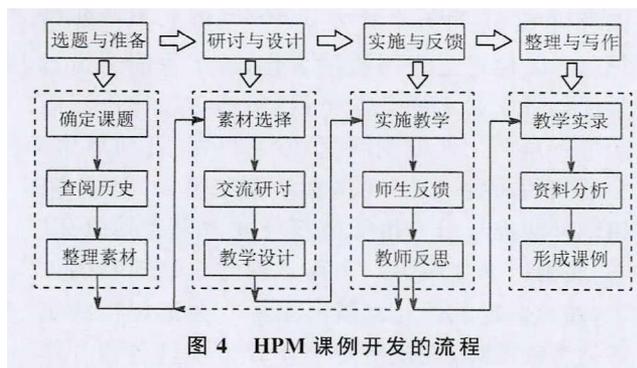
教育取向的数学史研究作为HPM研究的基石,在HPM领域居于重要的地位. 与纯数学史研究相比,HPM视角下的数学史研究不是为历史而历史,而是为教育而历史,其目的是期望通过研究历史上相关知识(概念、公式、定理等)的演变,获取教学启示,为数学课堂教学提供相关材料,为今日教科书的编写提供借鉴^[13]. 因此,教育取向的数学史研究为解决HPM领域长期存在的“无米之炊”问题带来了方法和启示. 教育取向数学史研究的途径主要有两种:一是对已有数学著作的研究,如中国古代的《九章算术》、国外数学史著作《古今数学思想》、《数学史》等;二是对早期教科书的研究,主要是19、20世纪以美国为主的西方早期教科书. 比如为了开发初中“三角形中位线定理”,一方面通过查阅数学著作,搜集可能会给教学活动带来启示的数学史料,包括古巴比伦泥版上的三角形土地分割问题、欧几里得《几何原本》中的相关命题,以及我国数学家刘徽(3世纪)采用割补法推导出三角形面积公式:“半底乘以高”与“底乘以半高”;另一方面从西方早期教科书入手,通过对近现代几何教科书中三角形中位线定理的考察梳理,发现历史上还曾出现过各种各样的证明方法,如反证法、同一法、平行四边形法等. 总之,数学史为我们打开了一扇大门,打破了思维定势,培养了学生的创造性思维,让我们得以领略古人的智慧和创新,而不再局限于教科书上的“唯一”证法.

4 HPM理论与实践的互动

4.1 HPM课例开发

尽管国际上HPM已有40多年的历史,目前也处于繁荣阶段,但HPM(包括HPM与教师教育)与一般数学教育研究框架、理论构建与方法论之间缺少清晰的联系,因此HPM与一般数学教育理论之间的联系还需要进一步加强^[14]. 中国的HPM实践有所不同,因为它以国际上较为认可. 且在中国具有60多年历史的课例研究(Lesson Study)为载体,成功架起了HPM与一般数学教育的桥梁,加之课例研究是一个实践依据、研究导向的专业发展的合作模式,它能够促进教师学习,

改善教学与学生学习,有利于课程实施与教学结果的共享,还有利于理论与实践的互动^[15].中国的HPM实践还架起了HPM与在职教师专业发展的桥梁,这与国际上HPM与教师专业发展的主流方式也有所不同,因为国际上主要以课程的形式促进职前教师的专业发展^[16].目前,已有很多中小学数学教师与HPM研究团队、教师专业发展指导团队、学校教研团队这三个团队中的一个或几个,按照如图4所示的流程,在共同体的支持下、以HPM理论框架为指导合作进行HPM课例研究,开发出了一系列较为成熟的HPM课例,如初中的“三角形中位线定理”、“三角形内角和”、“字母表示数”、“平行线的判定”、“平方差公式”,高中的“函数概念”、“对数概念”、“棱柱定义”、“椭圆定义”、“正弦定理”、“数系的扩充与复数的引入”、“三角函数序言课”等等.



但以上课例都只是针对某一节课进行的融入数学史的尝试,事实上,数学史可以融入更多联系紧密的数学内容中,这就是模块的方法(The modules approaches),包括三种规模:最小规模的历史包,通常在某一主题下的2-3节课中融入数学史;中等规模的模块,大约需要在10-20节课中融入数学史;最大规模的是课程,整门课程都融入数学史^[7].将数学史融入单元模块教学有其必要性和合理性,因为任何一块数学内容都不是孤立存在的,数学教学与教科书编写都是根据数学知识的内在逻辑顺序展开的,前后内容具有不可分割的联系,其价值包括史料应用的连续性、知识发生的自然性和情感渗透的整体性.基于单元模块教学的HPM行动研究分为计划、行动、反馈、反思四个部分.以立体几何单元为例,在教学的计划阶段,通过对20世纪中叶以前97种西方早期

教科书等历史文献的研究,选取合适的史料,对平面的概念、空间中的线线关系、面面平行的判定、线面垂直的判定这四节课进行初步的教学设计;接下来就是行动阶段,先对高一、高三学生进行调查,通过回收的数据改进教学设计,然后进行教学实践;在反馈阶段,每节课后对全班学生进行后测,对收集到的问卷、访谈结果和课堂录像加以分析,反观教学目标的达成情况;在反思阶段,教师反思教学过程,结合实践中遇到的问题对四节课进行再设计,然后整理编写,形成数学史融入教学的初始材料.为了开发出较为完善的HPM课例,行动研究的这四个步骤往往需要经过多次循环实施.

4.2 HPM课例分析

评价一个HPM课例精彩与否的标准是什么?这是HPM课例研究的重要基础之一,因为只有运用科学的评价框架对教学设计、课堂教学进行评价,才能指引HPM课例开发向着更好的方向发展.但目前国际上缺少针对HPM视角下数学教与学的评价框架,这也是实践与教学方面反对HPM视角的重要原因之一^[17].鉴于此,沈中宇等基于上述的HPM理论框架,从史料的适切性、方式的多元性、融入的自然性、价值的深刻性等方面构建了HPM课例的分析框架^[18].结合这一框架,HPM研究团队又构建了HPM视角下同课异构的分析框架.

对于HPM与非HPM的同课异构,可以从新课引入、概念建构、公式探究、新知巩固、课堂小结这五个教学环节分别进行宏观比较和微观比较.比如高中“任意角”的HPM课重在概念建构,通过追溯角的历史,演示日晷实验来创造角,而非HPM课则重在公式探究,通过设问引导来探究角的推广公式.由此,总结出HPM视角下高中数学概念教学的一些特点,相比之下,HPM视角下的教学更加体现了知识之谐、探究之乐、文化之魅和德育之效.

对于HPM与HPM的同课异构,可先从教学目标、重难点及教学流程上进行宏观比较,再从HPM课例分析框架的四个维度进行微观比较.对于小学“字母表示数”的两节HPM课,在史料的适切性方面,A课用视频呈现了代数发展三阶段的史料,B课则改编毕达哥拉斯的形数问题,相

比之下,B课更能凸显史料的有效性及其新颖性.在方式的多元性方面,两节课均借助微视频呈现古代数学家的故事,属于附加式,A课提炼出算数到代数的三阶段,是对历史内容的重构;B课改编形数问题,探究任意一个的情形,也属于重构,但B课对复制式和顺应式的运用更为突出.两节课均把史料自然地融入在教学中,体现了数学史的教育价值.

5 HPM 研究进展

5.1 HPM 视角下阅读材料的编写

《普通高中数学课程标准(实验稿)》指出:“数学是人类文化的重要组成部分.数学课程应适当介绍数学的历史、应用和发展趋势……”^[19],2017年普通高考考试大纲中也增加了对数学文化的要求,因此数学教育工作者应加强对数学文化的重视.以数学史为主题的阅读材料是教科书中传播数学文化的重要途径,但调查发现教师和学生对这部分内容的关注度普遍偏低,这与编写阅读材料的初衷大相径庭,因此阅读材料的编写与使用是一个值得探讨的问题.日本有关教材开发方面的理论值得我们借鉴,教材开发专家有田和正认为:所谓教材开发,就是指“对那些在学生周围无限存在的素材,通过转换视角、重组内容、改变顺序等方式进行加工,使学生能从中产生问题,激发起探究的热情”.^[20]根据教材开发的理论及数学课程标准的相关要求,结合数学学科的特点,总结出阅读材料编写应遵循的五项原则:科学性、趣味性、可学性、有效性和人文性.以高中人教版教科书中的阅读材料“三角学与天文学”为例,它存在着趣味性不足,对学习三角学的必要性、三角学和对数之间的关系的阐述不够充分,缺少对三角学的历史意义和应用价值的介绍,缺少数学人文的一面等问题.为了弥补这些不足,就需要对三角学进行教育取向的历史研究,还原三角学的前世今生,并从中提炼出一些有价值的、可融入阅读材料的素材,如托勒密定理与两角和与差的正弦、余弦公式的推导,韦达(F. Vieta, 1540~1603)利用倍角公式解45次方程问题,还有生命不息、学术不止的欧拉,勇担重任的雷格蒙塔努斯(Regiomontanus, 1436~1476),传承学术的雷提库斯(G. J. Rhaeticus, 1514~1576)等等.

5.2 HPM 视角下的序言课

序言课是数学教育领域中一个比较新颖的研究方向,它的主要任务是揭示数学学科研究的对象、内容和解决问题的思想方法,具有承上启下的作用^[21].假若教师能在某一章或关联程度极高的某几章内容之前,以序言课的形式帮助学生理清“为什么学?”“学什么?”“如何学?”,将会有效地激发学生的学习兴趣 and 探究热情,帮助他们了解前后内容之间的联系,初步构建知识网络.然而在实际教学中,一方面,教师对序言课不甚了解,没有认识到序言课的重要性,加之课时紧张,常常将其“束之高阁”;另一方面,教师缺乏理论指导和相关实践经验,很难将学生未曾学习但高度相关的许多内容融合到一节课中,且要以学生能够理解和参与的方式组织教学活动.数学史为序言课的开发提供了新的思路,因为从教育取向的数学史研究出发,教师不仅了解了历史上数学知识产生、发展背后的动因,能够帮助学生理解知识学习的必要性,即“为什么学”,而且更加宏观地知悉了数学知识体系及其内部知识之间的联系,有助于让学生精准了解“学什么”,此外,数学知识产生、发展过程中出现的解决数学问题的方式、方法,还有助于启发今天的学生“如何学”.目前已开发了多节HPM视角下的序言课,比如“三角函数序言课”、“圆锥曲线序言课”,产生了不错的效果.

5.3 HPM 课例应用与 HPM 案例教学

尽管HPM课例开发对教师的专业发展促进作用很大,比如个案教师通过HPM课例开发,在确定教学目标、设计教学内容、使用数学史料等方面有了一定的提升,MKT的各个维度有了一定的丰富,数学观与数学史的使用观念也发生了正向的转变^[22].但在开发新课例的过程中,教师需要投入大量的时间与精力,需要HPM研究团队、一线教师和教师专业发展指导者等在课例研讨、课例打磨过程中的共同参与,且教师个体开发HPM课例对HPM理念传播的贡献十分有限.因此,促进HPM理念传播与教师专业发展的路径还需要进一步的探索,HPM课例应用与HPM案例教学就是基于HPM课例开发探索出的新路径.

HPM课例应用是对已开发的较为成熟的HPM课例的二次利用,教师根据其教学目标及任教班级的实际情况,对已有课例中的一些环节

进行修改和完善,然后用于自己的教学实践,因此能够大大节省时间,提高效率.以四年级“角的概念”为例,教师进行课例应用的第一步是研读教科书和相应参考资料,对教学目标、重难点进行再定位.第二步是根据教学目标和任教班级的实际情况,研读已开发的 HPM 课例,找出其中的问题,予以修改完善,并进行试讲.第三步是根据试讲效果,对教学设计进行再修改.第四步是反思课例应用的全过程.由此可见,HPM 课例应用不仅进一步促进了一节更完美的 HPM 课例的生成,而且只要 HPM 课例一经发表,就会有更多感兴趣的教师将其应用于自己的教学实践中.

HPM 案例教学是传播 HPM 理念、促进教师专业发展的另一种重要途径.运用已开发的 HPM 课例于教师教育课程“数学史与数学教育”,其流程主要包括教材呈现—历史分析—设计研讨—案例展示—评价反馈等步骤.以“数系的扩充与复数的引入”案例教学为例,首先呈现相关教材内容,让师范生或在职教师回顾自己的教学经历,反思自己的教学困惑;接着,呈现揭示虚数概念的本源及其产生的必要性的丰富素材,比如卡丹问题、邦贝利三次方程问题等,让师范生或在职教师研讨这些素材的融入能否解决自己的教学困惑,并尝试进行教学设计;然后,展示已开发的 HPM 课例,包括教学流程与教学反馈;最后,呈现职前和在职教师对于复数概念产生的意象,并调查了复数概念案例教学对本科师范生、全日制硕士、在职教育硕士和在职教师四类群体的影响.

6 总结与展望

中国的 HPM 经过十余年的发展,已从扎根实践到理论生成,又从理论生成到理论与实践的互动,并出现了新的研究动态:不再仅仅局限于教育取向的数学史研究与 HPM 课例开发,而是形成了基于教育取向的数学史研究,在共同体支持下,以 HPM 课例开发为核心,包括课例开发、课例应用、案例教学在内的,特色鲜明的教师专业发展与 HPM 理念传播体系,且以课例研究为载体的课例开发不再局限于单个课例的开发,出现了模块教学、序言课等新类型,阅读材料等传播数学文化的课程素材也受到了一定的关注,课例评价体系的雏形已形成.但总体而言,中国的 HPM 还处于发展阶段,理论与实践的互动还有待进一步

加强,特别是需要借助更多像 MKT、课例研究这样的一般数学教育理论,从而使得 HPM 与一般数学教育的联系更为密切;HPM 与教师专业发展的体系还需要进一步完善,一方面,课例开发、课例应用、案例教学方面的研究还需要进一步深化,另一方面,它们之间的最佳组合方式及其最优切入口还需要深入探索;数学史融入教科书的研究,以及包含课堂评价、学生评价等在内的评价框架的构建需要投入更多的精力,因为无论国际上、还是国内,这方面的研究都很少,且它们也是加强与一般数学教育联系的关键;最后,认识论与数学史的关系在中国处于真空状态,需要予以关注.

参考文献

- [1] 万家练. 对《数学教育学报》下载频次较高的论文评析——以 2010 年后的载文为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(2): 96-102
- [2] 康世刚, 胡桂华. 对我国“数学史与中小学数学教育”研究的现状分析与思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18(5): 65-68
- [3] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017
- [4] Fauvel, J. Using history in mathematics education[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 11(2): 3-6
- [5] Tzanakis, C., Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey[A]. In: Fauvel J, van Maanen J (Eds.). History in Mathematics Education[C]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000: 201-240
- [6] Gulikers, I., Blom, K. A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, 47: 223-258
- [7] Jankvist, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2009, 71(3): 235-261
- [8] Wang, X., Qi, C. & Wang, K. A categorization model for educational values of the history of mathematics: An empirical study[J]. Science & Education, 2017, 26(7): 1029-1052
- [9] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012, (02): 1-5
- [10] Jankvist, U. T., Moscold, R., Fauskanger, J. & Jakobsen, A. Analysing the use of history of mathematics through MKT[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2015, 46(4): 495-507
- [11] Ball, D. L. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1990, 21(2): 132-144

(下转第 19 页)

(2)将信息技术充分融入教学中

近年来,随着科技迅速发展,信息技术已得到了充分的认可和广泛的应用.在函数教学中,教师可以借助几何画板、GGB等软件动态地展示函数的动态变化,如:探究当 a 不同时, $y=a^x$ 图象变化趋势问题.信息技术的融入可以促进学生以“形”定“质”,更好地培养学生的数学抽象能力.

(3)有意识地培养学生整理总结的习惯

《普通高中数学课程标准(2017年版)》中指出数学抽象能力水平三的划分包括“感悟高度概括、有序多级的数学知识体系.”^[1]因此,养成数学知识的整理、归纳、总结等习惯,对数学抽象能力的提升有很大帮助.同时教师也可以根据情况,在教学的引入和总结环节有意识地来建构数学知识体系,定期或单元教学结束后,主动引导学生自主整理,绘制思维导图等.

(4)引导学生经历数学抽象的全过程

教师应加强教学文本的解读能力,准确理解数学知识,真正领悟教材编写意图,设计合理的探究活动来发展学生的数学抽象素养,学生的抽象经验需要在探究活动中积累,抽象能力需要在探究活动中发展,数学抽象素养需要在数学抽象经验的积淀和升华中培育.将探究活动与数学抽象过程的程序方式相对应,由浅而深设计有关探究活动,逐步实现从具体到抽象的过程,让学生体验

并熟悉数学抽象的“基本套路”,不断在活动中提升数学抽象素养.

(5)注重同化在数学抽象意义建构中的作用

涂荣豹教授在文[4]中指出:概念的意义建构并不是在一节课中、一次活动中就能够完成,它必须经过不断地运用,多次地反思,反复地辨析,而且有时还需对概念进行必要的解构和重构,才能对知识本质的理解逐渐清晰和深刻.这里要着重指出的是,数学抽象的发生需要经历概念的同化过程,而且这不是在概念生成的初始阶段的一节课中就能全部达成,概念的意义的综合贯通更多的是需要个人的体验与感悟.因此,需要在后续教学和解题感悟中,继续发挥同化在数学抽象中的作用,并通过学习者的反思内化达到概念的“对象”与“过程”的平衡共存,真正实现概念建构中的数学抽象素养的形成.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版)(2020年修订版)[M].北京:人民教育出版社,2020
- [2]钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学[M].北京:北京师范大学出版社,2017:36-45
- [3]吕增锋.数学微课的教学设计策略[J].中学数学(高中版),2016(19):48-50
- [4]涂荣豹.“教与学对应”原理的实践——对“函数单调性”教学设计的思考[J].数学教育学报,2014(11):5-9
- [5]Lerman, S. (Eds.), Encyclopedia of Mathematics Education. Netherlands; Springer, 2014; 255-260
- [6]Clark, K., Kjeldsen, T. F., Schorcht, S., et al. History of mathematics in mathematics education: Recent developments[C]//Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting. Montpellier; IREM de Montpellier, 2016; 135-180
- [7]沈中宇,李霞,汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J].教育研究与评论(中学教育),2017(01):35-41
- [8]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验稿)[M].北京:人民教育出版社,2005:2
- [9](日)市川博.社会科的使命与魅力——日本社会科教育文选[M].沈晓敏译.北京:教育科学出版社,2006
- [10]范文豪.高中数学《立体几何》序言课教学的实践与研究[J].现代基础教育研究,2014,14(02):148-152
- [11]岳增成,汪晓勤. HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展[J].基础教育,2017,14(2):96-103,112

(上接第12页)

- [12]汪晓勤. HPM 视角下的小学数学教学[J].小学数学教师,2017(21):77-83+2
- [13]汪晓勤,张小明. HPM 研究的内容与方法[J].数学教育学报,2006(01):16-18
- [14]Jankvist, U. T. An implementation of two historical teaching modules: outcomes and perspectives[A]. In: Barbin E, Kronfellner M, Tzanakis C, editors. History and epistemology in mathematics education—Proceedings of the 6th European Summer University. Vienna: Holzhausen Publishing, 2011; 139-152
- [15]Huang, R., Shimizu, Y. Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective[J]. ZDM Mathematics Education, 2016, 48(4): 393-409
- [16]Barbin, E., Tzanakis, C. History of Mathematics and Edu-