都 是 0 惹 的 “祸”

——例析“0”和“$\mathbf{0}$”在教学中的特殊作用

姜卫东

(扬州中学，江苏 扬州　225009)

摘　要: 0 和 $\mathbf{0}$ 是高中数学中的两个特殊的量，它们无论在概念与定理的建构，还是在解题教学及命题工作中都具有独特的作用. 文章通过具体案例分析，提醒教师在教学工作中不可忽视 0 和 $\mathbf{0}$ 的特殊性.

关键词: 概念; 定理; 解题; 命题

中图分类号: O122　　文献标识码: A　　文章编号: 1003-6407(2022) 01-0025-04

数量 0 与向量 $\mathbf{0}$ 都是一个特殊的量. 正是由于它的特殊性，教材中建构数学理论时，对于涉及 0 与 $\mathbf{0}$ 的概念和定理都有许多“规定”; 同样，在平时的解题教学中，也不可忽略 0 或 $\mathbf{0}$ 所对应的特殊位置或特殊情形，避免因漏解而致错. 另外，在命制试题时，对于 0 或 $\mathbf{0}$ 所对应的极端情形，要格外小心. 下面，笔者结合自身教学实践中的案例，分别从 3 个方面进行具体分析:

1　重视 0 和 $\mathbf{0}$ 在概念与定理教学中的作用

在中学教材的许多概念及定理中，都会对 0 与 $\mathbf{0}$ 的情形单独进行表述. 因此，教师在讲解这些概念及定理时，要特别强调 0 与 $\mathbf{0}$ 的特殊情形，确保概念和定理教学的完整性.

案例 1　平行向量(共线向量) .

教材在定义平行向量(共线向量) 时，分了两步完成，首先给出“方向相同或相反的非零向量”，然后特别规定: 零向量与任一向量平行. 在讲授此概念时，要提醒学生不能忽略此规定.

例 1　下列命题错误的序号是______.

1) 向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量，则点 A，B，C，D 必在同一条直线上;

2) 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$;

3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;

4) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 一定不与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

分析　1) ，2) ，3) 容易判断，此处略. 对于 4) ，当向量 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时，无论向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是否共线，都能满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，故答案为 1) ，2) ，4) .

案例 2　向量的数乘及数量积.

在向量数乘的定义中，当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\lambda=0$ 时，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$(是零向量，而非实数 0) . 在定义数量积时，也分两步完成: 首先当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$; 而当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时，规定 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$(是数量 0 而非 $\mathbf{0}$) . 许多教师在讲解这一定义时，会忽略第二种情况，学生在回答数量积的定义时，也会漏答第二种情况.

例 2　有 4 个式子: 1) $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$; 2) $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$; 3) $0-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$; 4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$. 其中正确的个数为______.

分析　只有 1) 是正确的. 在 2) 中，$\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}$ 的结果是数量 0，而非向量 $\mathbf{0}$.

案例 3　平面向量共线定理.

平面向量共线定理的前提条件是 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，在此前提下，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 如果没有这一前提，该定理就不成立.

例 3　判断下列命题的真假: 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

分析　当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 时，这样的实数 λ 是不存在的，故原命题为假命题.

案例 4　排列数与组合数的符号.

教材在介绍完排列数 A_n^m 与组合数 C_n^m 定义之后，特别规定当上标 $n=0$ 时，$A_n^0=C_n^0=1$. 在解题时，也不能忽略这一特殊情况，否则会导致漏解!

例 4　解不等式 $A_9^x>6A_9^{x-2}$.

分析　由排列数公式可知

收文日期: 2021-08-01; 修订日期: 2021-08-22

基金项目: 2019 年江苏省中小学教学研究室课题(2019JK13-L319)

作者简介: 姜卫东(1971—) ，男，江苏扬州人，中学高级教师. 研究方向: 数学教育.

$$x^2-21x+104>0,$$

解得 $$x>13 \text{ 或 } x<8.$$

因为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 9,\\ 0\leqslant x-2\leqslant 9,\end{cases}$ 所以

$$2\leqslant x\leqslant 7.$$

又 $x\in \mathbf{N}^*$,可得 $x=2,3,4,5,6,7$.

这里就不能忽略排列数中上标 $x-2$ 的情况.

2 重视 0 和 $\mathbf{0}$ 在解题教学中的作用

在平时的解题教学中,如果忽略对 0 和 $\mathbf{0}$ 的讨论,也会导致解题时漏解或出错.

例 5[1] 如果函数 $f(x)=\dfrac{2^x-a}{a\cdot 2^x+1}$ 是奇函数,则实数 $a=$______.

分析 对于这道填空题,一种常见的错解:由 $f(x)$ 是奇函数,可得 $f(0)=0$,即 $\dfrac{1-a}{1+a}=0$,得 $a=1$.

以上解法是有问题的.当 $f(x)$ 的定义域中含有 $x=0$ 时,可以由 $f(0)=0$,得到 $a=1$,然后再验证此时 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数;但当 $f(x)$ 的定义域中不含有 $x=0$ 时,$f(0)$ 不存在,此时由 $f(0)=0$ 得到 $a=1$ 就毫无意义了.实际上,当 $x=0$ 时,由分母 $a\cdot 2^0+1=0$ 可得 $a=-1$,然后再验证此时 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{1-2^x}$ 为奇函数.故正确答案应为 $a=\pm 1$.

本题也可以直接根据奇函数的定义,求出正确答案.

由 $f(x)$ 为奇函数,得

$$f(-x)+f(x)=0,$$

即 $$\frac{(2^x+2^{-x})(a^2-1)}{(a\cdot 2^{-x}+1)(a\cdot 2^x+1)}=0,$$

从而 $$a^2-1=0,$$

得 $$a=\pm 1.$$

例 6 如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=3$,$\angle ABC=60°$,点 D,E 分别在边 AB,AC 上,且满足 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{CE}{EA}=2$,$F$ 为 BC 的中点.

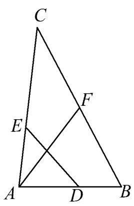

图 1

1) 若 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,求实数 λ,μ 的值;

2) 若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{2}$,求边 BC 的长.

分析 1) 在 $\triangle ADE$ 中,

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

据题意可得 $$\lambda=-\frac{2}{3},\quad \mu=\frac{1}{3}.$$

2) 学生中出现了如下的解法:

由 $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$,得

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+AC)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right),$$

化简得 $$9=-2\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

设 $AE=x$,则

$$9=-2\times 9+9x^2-9x\cos A,$$

即 $$27=9x^2-9x\cos A. \tag{1}$$

过点 C 作 AB 的垂线,垂足为 H.

①当点 H 在线段 AB 上时(如图 2),

$$3x\cos A=AH,$$

从而 $$9x^2-27=3AH.$$

又 $\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{3-AH}{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,得

$$3\sqrt{3}-\sqrt{3}AH=CH,$$

两边平方,整理得

$$4AH^2-18AH=9x^2-27=3AH,$$

即 $$4AH^2=21AH,$$

从而 $$AH=\frac{21}{4}>3\text{(舍去)}.$$

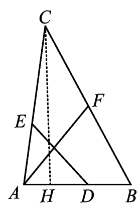

图 2

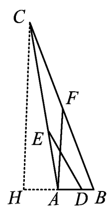

图 3

②当点 H 在线段 BA 的延长线上时(如图 3),

$$3x\cos A=-3x\cos\angle CAH=-AH,$$

代入式(1),得

$$9x^2-27=-3AH.$$

又 $$\tan\angle BCH=\frac{BH}{CH}=\frac{3+AH}{CH}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

得 $$3\sqrt{3}+\sqrt{3}AH=CH,$$

两边平方,整理得

$$4AH^2+18AH=9x^2-27=-3AH,$$

即 $$4AH^2=-21AH,$$

从而 $$AH=-\frac{21}{4}\text{(舍去)}.$$

于是得出本题无解的结论.

实际上,学生的解题过程尽管有点繁,但方法

是对的.为什么最后得不到正确答案呢?原因在于忽略讨论了 $AH=0$ 的情况.

本题我们还可利用向量运算来求解.

由 $$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA},$$

得 $$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2.$$

设 $BC=a$,由 $AB=3$,$\angle ABC=60°$,得

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{4}a-3,$$

据题意 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}$,从而

$$2a^2-3a-54=0,$$

解得 $a=6$(负值舍去),故 $BC=6$.

例 7　已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,$AB=2$,$AC=3$,如果 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$,其中 $\lambda\in\mathbf{R}$,则 $\angle BAC=$______.

分析　对于本题,许多学生给出了如下的解法:

如图 4,取 AC 的中点 D,联结 OD.由 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,可知

$$OD\perp AC,$$

又 $$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD},$$

从而 $$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}.$$

因为 $\lambda+(1-\lambda)=1$,所以点 B,O,D 共线.又 $BD\perp AC$ 且 D 为 AC 的中点,可知 $AB=BC=2$,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$.

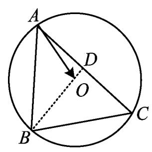

图 4

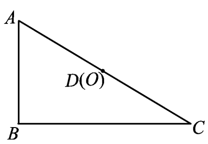

图 5

乍一看,上面的解法无懈可击.但仔细分析可以发现,以上解法是存在问题的.在以上解法中,用到了一个结论"若 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$(其中 $m+n=1$),则点 O,B,D 共线",这个结论成立的前提是点 O,B,D 不重合.而在本题中,点 D 与点 O 有可能是重合的,也就是 λ 的值可能为 0.因此,本题应分两种情况讨论:

1) 当点 D 与点 O 不重合时,由上述解题过程可知 $\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$.

2) 当点 D 与点 O 重合时(如图 5),

$$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AO},$$

又 $x+2y=1$,得 $2y=1-x$,从而

$$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AO},$$

即 $$x(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})=0,$$

亦即 $$x\overrightarrow{OB}=0.$$

又 $\overrightarrow{OB}\neq 0$,于是 $x=0$,$y=\frac{1}{2}$,此时

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

从而 $$\cos\angle BAC=\frac{2}{3}.$$

综上所述,$\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$ 或 $\cos\angle BAC=\frac{2}{3}$.

3　重视 0 和 $\mathbf{0}$ 在命题中的作用

教师在平时的命题工作中,也要关注 0 或 $\mathbf{0}$,特别当出现间断点 0 时,更要仔细推敲,否则就会出现科学性错误.

例 8[2]　$f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数,且不恒为 0,记 $g_n(x)=\frac{f(x)}{x^n}$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$).若对定义域内的每一个 x,总有 $g_n(x)<0$,则称 $f(x)$ 为"n 阶负函数";若对定义域内的每一个 x,总有 $[g_n(x)]'\geqslant 0$,则称 $f(x)$ 为"n 阶不减函数"(其中 $[g_n(x)]'$ 为函数 $g_n(x)$ 的导数).

1) 若 $f(x)=\frac{a}{x^3}-\frac{1}{x}-x$(其中 $x>0$)既是"1 阶负函数",又是"1 阶不减函数",求实数 a 的取值范围.

2) 对任给的"2 阶不减函数" $f(x)$,如果存在常数 c,使得 $f(x)<c$ 恒成立,试判断 $f(x)$ 是否为"2 阶负函数"?请说明理由.

参考答案　1) 依题意可得

$$g_1(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{a}{x^4}-\frac{1}{x^2}-1,$$

又 $f(x)$ 是"1 阶不减函数",故 $[g_1(x)]'=-\frac{4a}{x^5}+\frac{2}{x^3}\geqslant 0$ 恒成立,得 $a\leqslant\frac{1}{2}x^2$.因为 $\frac{1}{2}x^2>0$,所以只需 $a\leqslant 0$.又当 $a\leqslant 0$ 时,$g_1(x)<0$ 显然在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,故 $a\leqslant 0$.

(下转第 28 页)

问从“形”中显　理自“数”中来

——多视角剖析极值点偏移问题的命制思路与考查方向

江海华

(太仓市明德高级中学,江苏 太仓　215400)

摘　要:2021年全国数学新高考Ⅰ卷导数压轴题以“极值点偏移”为命题背景,并非导数的主要应用,给不熟悉该背景的广大师生设置了不小的障碍.文章主要从极值点偏移、“形”的启发、解法的多样性等多个视角来阐述该题的命制思路与考查方向,试图提供一个新的突破口.

关键词:极值点偏移;数形结合;化归转化

中图分类号:O123.4　文献标识码:A　文章编号:1003-6407(2022)01-0028-04

2021年,江苏、山东、广东等七省(市)参与的新高考“首考”顺利落幕后,各专家教授、一线教师纷纷投入到新试题的解答“揭秘”中.当然,我们应该鼓励大家对高考题进行讨论分析:一方面,从多样性的试题解答中,可以使广大师生更加了解命题者的意图,进一步明确新高考的考查方向;另一方面,从多视角的试题解读中,命题专家也可以更加广泛地听取广大师生的意见,在这种良性的“沟通—互动”中使命题工作与课堂教学真正落实到“素养立意,凸显本质,选拔人才”中来.

(上接第27页)

2)先证 $f(x)\leqslant 0$.假设存在正实数 x_0,使得 $g_2(x_0)>0$,则 $f(x_0)>0$.由题意,当 $x>0$ 时,$g_2'(x)\geqslant 0$,可得 $g_2(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $x>x_0$ 时,$\frac{f(x)}{x^2}>\frac{f(x_0)}{x_0^2}$ 恒成立,即 $f(x)>\frac{f(x_0)}{x_0^2}x^2$ 恒成立.故必存在 $x_1>x_0$,使得 $f(x_1)>\frac{f(x_0)}{x_0^2}x_1^2>m$(其中 m 为任意常数),因此当 $x>0$ 时,$g_2(x)\leqslant 0$,即 $f(x)\leqslant 0$.

再证 $f(x)=0$ 无解.假设存在正实数 x_2,使得 $f(x_2)=0$,则对于任意的 $x_3>x_4>0$,有

$$\frac{f(x_3)}{x_3^2}>\frac{f(x_2)}{x_2^2}=0,$$

即

$$f(x_3)>0,$$

矛盾,故假设不成立,$f(x)=0$ 无解.

综上可得 $f(x)<0$,即 $g_2(x)<0$.故所有满足题设条件的 $f(x)$ 都是“2阶负函数”.

评注　对于第1)小题,原题与给出的答案都是正确的.对于第2)小题,从表面上看,解题过程无懈可击,但却是一个错题,举反例如下:如图6,可知 $g_2'(x)\geqslant 0$,若 $g_2(x)\leqslant 0$,则 $\frac{f(x)}{x^2}\leqslant 0$,由 $x^2>0$,知 $f(x)\leqslant 0$,故存在 $c>0$,使得 $f(x)<c$ 恒成立.但这时 $g_2(x)\leqslant 0$,而不是 $g_2(x)<0$,故原题的第2)小题是一个有科学性错误的问题.

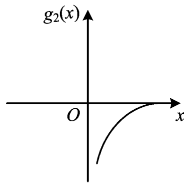

图6

从以上案例分析可以看出,0和0表面上看是虚无的量,但实际上具有非常丰富的意义.无论是在平时的概念和定理教学中还是在解题教学及命题工作中,都要充分挖掘它们的深刻内涵,切不可忽略它们的重要作用,从而保证课堂教学与命题工作的科学与有效.

参 考 文 献

[1] 戚有建.解题不能急功近利,因为欲速往往不达[J].数学通讯:下半月,2012(7):29-30.

[2] 姜卫东.借你一双慧眼:在似是而非的解法背后[J].福建中学数学,2015(8):45-48.

收文日期:2021-06-21;修订日期:2021-08-22

作者简介:江海华(1992—),男,安徽安庆人,中学二级教师.研究方向:数学教育.