心; 当学生进行交流合作时，教师要耐心聆听，促进学生之间的互动，引导学生集思广益. 在数学实验教学中，教师引导及时，就会激发学生探究的兴趣，培养学生研究的热情，为发展学生的创新意识提供平台.

3.4　折纸实验课的一般范式

在初中阶段与折纸相关的数学实验内容还是比较多的，如折点( 线段的中点、三角形的外心、内心、垂心和重心等) 、折线( 三角形的中线、角平分线、高线、线段的垂直平分线、垂线、平行线) 、折形( 等腰三角形、等边三角形、正方形、菱形、正五边形、正六边形、轴对称图形等) 以及其它与折纸相关的探究型问题，笔者在教学实践中，总结出折纸数学实验课大致包含四个基本环节 "画其图"、"变其形"、"明其理"、"探其用". "画其图"是数学实验活动探究的载体 "变其形"是探究数学实验活动的手段 "明其理"是数学实验活动成败的关键 "探其用"是数学实验课的高潮部分，一个实验往往是对个别现象的处理，通过推广和延伸，有助于学生完善知识、提炼方法、积累经验、内化技能、感悟思想，培养学生的应用意识和创新意识，使数学实验价值得到升华.

折纸实验打开了数学教学的一扇窗，有利于将零散的知识结构化、单一的图形模型化、抽象的思维显性化、静态的图形动态化，学生理解透彻、印象深刻、学习效果好. 教师在设计数学实验课时，需要注意的是: 目标要明确、准备要充分、活动要充足、引导要及时，要根据学生已有的知识经验和认知发展水平，把握教材中章节知识的前后联系，在学生思维的最近发展区设置实验教学的起点，将教材中的知识点做加工，设计成适合学生探索的问题串，把学生带入数学探究的乐园，通过数学实验调动学生解决问题的欲望，激发学生探究的兴趣，促使学生边操作边思考，边思考边建构，边建构边完善，边完善边应用，边应用边创新，真正让知识、能力和方法有机地融合在一起，促进学生数学素养的提升.

参考文献

[1] 黄玉华，黄蓉华. 数学实验: 打开复习课的一扇窗 [J] . 中学数学，2017( 4) .

[2] 董林伟等. 初中数学实验的理论与实践研究 [M] . 南京: 江苏凤凰科学技术出版社，2016.

作者简介　黄玉华( 1973—) ，男，江苏南京人. 主要从事数学课堂教学研究，曾获"江苏省特级教师"、江苏省"333 高层次人才培养工程"培养对象、"江苏省教育学会系统先进个人"、"全国优秀数学竞赛辅导员"、"全国优秀校刊编辑"等称号. 在省级以上刊物发表论文一百多篇，其中有 9 篇文章被中国人民大学《复印报刊资料·初中数学教与学》全文转载.

# 经历建模过程　发展模型思想

## ——以人教版教材"翻牌游戏中的数学道理"为例

浙江省台州市白云学校　318000　张安军

【摘　要】 模型思想是数学核心素养的组成部分. 以"翻牌游戏"为例，让学生感受建模过程，积累建模经验，提升核心素养. 经历图式化、符号化的过程，感悟简约化、抽象思想; 从游戏的各种状态和操作中发现关系和规律，感悟数学化、模型思想; 经历多种建模的方法，体验模型思想的本质; 经历发现和提出问题，加深模型思想的领会.

【关键词】 模型思想; 课堂教学; 翻牌游戏

模型思想是《义务教育数学课程标准( 2011) 年版》倡导的十个核心概念之一，它是学生体会数学与外部世界联系的基本途径，也是数学核心素养的重要组成部分. 现行的人教版教材中十分重视模型思想的渗透，在课后练习题、复习题和阅读材料中安排了大量的应用性问题. 这些应用性问题可分成两部分，一部分是用自然语言表示的应用性问题，求解时先转化为数学语言，而后利用已学过模型进行求解即可; 另一部分是"毛坯形"的应用性问题，"毛坯形"的问题贴近现实生活，它具有现实生活的粗糙和原始特点，把实际问题通过抽象、概括、转化为数学问题. 前者省略了抽象转化的过程，后者它需要学生深度加工并抽象成符号转化为一个相应的数学问题. 相对自然语言表示的应用性问题，"毛坯形"问题更突出体现了分析、假设、抽象的数学加工过程、数学工具、方法和模型的选择、分析过程; 模型的求解、

验证、再分析、修改假设、再求解的迭代过程，它更完整地表现了学数学和用数学的关系[1]. 教材中能适合初中生水平又能结合课本教学内容的“毛坯形”建模问题不多，一线老师开发这样的问题也十分困难.因此，对于教材中“毛坯形”问题教师要不失时机地对学生进行模型思想的渗透，让学生真切地感受建模的抽象过程，积累建模经验，提升学生的核心素养.在课堂教学中如何让学生深刻地感受建模的抽象、转化等的内容呢? 笔者以教材中的阅读材料“翻牌游戏中的数学道理”为课题进行了一次尝试.

## 1 教学实录

### 1.1 参与游戏，体验游戏问题的抽象和简化

师: 同学们，本节课我们一起分享游戏中蕴含的数学道理.

游戏1: 桌上有6张正面朝上的扑克牌，每次翻动其中任意4张(包括已翻过的牌)，使它们一面向上变为另一面向上，这样一直做下去，能否使6张牌都反面向上? 若能，给出具体操作，若不能请说明理由.

师: 老师忘带了扑克牌，还有办法进行演练吗?

生$_1$: 可以用书本、作业本替代扑克牌.

生$_2$: 用实物代替比较麻烦，我用“正”字代替扑克牌正面朝上，“反”字代替扑克牌反面朝上.

老师对上述两个方法都比较肯定，同时引导学生哪一种方法更简便，让学生在比较中进行优化，同时启发，让学生找出了其它的替代方法，结果如下: 用“0”“1”分别代替扑克牌正面和反面的，有的用“+1”“-1”替代; 还有的说可以省略“1”，用“+”和“-”代替.

接着学生在众多的表示中再进行优化选择，然后总结这个抽象化的思维过程，用书本代替到“正”、“反”代替，再到“+”、“-”符号，肯定了用数学符号代替，使游戏的操作变得简便.最后，教师引领学生反思，扑克牌的正、反面换成纸杯的杯口朝上和朝下来做游戏，这两个游戏是否一样.当然这两个本质是一样的，和实物无关.学生也从中体验到了问题的抽象和简化有应用的广泛性之美.

师: 对于游戏1有确切的想法了吗? (老师请一位同学给出操作，具体操作略)

### 1.2 构建模型，体验数学模型思想

师: 对于游戏1，你们还有困惑和新的想法吗?

(学生有的提出改变扑克牌的总张数，如6张、9张或其它张数; 有的提出每次翻动牌的不同张数，如每次翻动3张牌) 师生共同选择如下的一个游戏问题.

游戏2: 桌上有9张正面朝上的扑克牌，每次翻动其中任意4张(包括已翻过的牌)，使它们一面向上变为另一面向上，这样一直做下去，能否使9张牌都正面向上; 若能，给出具体操作，若不能请说明理由.

(学生在完全理解游戏规则后，独立进行操作演练，这期间偶尔有同学声称能使9张牌都正面向下，然后老师让这些同学进行操作演示，其它的同学发现这些同学操作过程中都存在翻牌张数错误)

师: 通过操作，我们能使9张牌都正面向下吗?

生$_6$: 不能做到.

学生的理由是，9张牌正面朝上是奇数，而每轮翻4张，不可能通过偶数次来翻完奇数.

老师提出，在条件中有说明，每次翻动其中任意4张(包括已翻过的牌)，在第一轮翻牌之后，若第二轮取3张正面向上，1张反面向上，这两个都是奇数.

(学生又陷入沉思，几分钟后，生$_6$继续补充)

生$_6$: 按老师所说，翻得结果如下:

| | 第1张 | 第2张 | 第3张 | 第4张 | 第5张 | 第6张 | 第7张 | 第8张 | 第9张 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第1次翻 | + | + | + | + | + | − | − | − | − |
| 第2次翻 | + | + | − | − | − | + | − | − | − |

这样，依然是3张牌正面向上，还是奇数.

老师表扬了这位同学继续钻研问题的勇气，把扑克牌正面和反面理解成数学中的奇数和偶数，这样翻牌游戏和数学中的奇偶性之间就搭建起了桥梁.同时引导学生继续思考，如何有条理、有依据地进行表述.

生$_7$: 扑克牌“正面向上”记为“奇数”，“反面向上”记为“偶数”.翻动一张牌相当于加上1个“奇数”，翻动4张就相当于加上4个奇数，即加一个偶数，不改变原来的奇偶性，那么初始状态9张扑克牌“正面向上”为奇数.这样一来，无论你翻动多少次，偶数不会变成奇数.

师: 你为什么把“翻动一张牌”记成“加上1个‘奇数’”.

生$_7$: 因为“翻动一张牌”，都要改变该牌的朝向，(即正面向上变成反面向上，反面向上变成正面向上)，只能翻译成加上一个“奇数”，若翻译成加上一个“偶数”，那么不符合题意了.

师: 你是怎样想到把翻牌游戏变成数学中的奇偶性问题?

生$_7$: 这个游戏扑克牌只有两种状态，并且这两种状态是互为相反的.我就想到用奇偶数表示这两

种状态.

师生共同总结这个问题的关键，是把翻动一张牌记作“加上 1 个奇数”来表示，翻动 2 次牌记作“加上 2 个奇数”来表示，翻动 $n$ 张牌记作“加上 $n$ 个奇数”来表示.

师：生$_7$同学把游戏中牌的两种状态记为奇数、偶数，然后把翻一张牌等价于加上一个奇数，这样游戏中翻牌的问题转化为数学中的奇偶性计算问题，这位同学善于转化，是一位转化高手.

师：除了转化为奇数、偶数外，你还有其它的想法吗？

师：上述扑克牌的两种相反状态还可以用哪些符号进行简化呢？

有学生提出用“+”和“-”表示，也可以用“+1”和“-1”表示.

师：你们对此有什么启发或解决的办法吗？

生$_8$：我是这样想的，把扑克牌的正、反面分别记为“+”和“-”，翻 1 张牌相当于添上一个“-”，每轮翻 4 张牌相当于添上 4 个“-”，由于添上 4 个“-”，结果还是为“+”，开始状态为 9 个“+”，中间过程每轮翻牌增添的结果为“+”，而所要求的目标为 9 个“-”，因此不可能达到这个结果.

生$_9$：我和生$_8$ 想法差不多，只不过把扑克牌的正、反面分别记为“+1”和“-1”，翻1张牌记为乘以一个“-1”，初始状态 $P_{开始}=(+1)^9=1$，设翻动 $n$ 轮，每轮翻动 4 张，用数学式子表示：$(-1)^{4n}P_{开始}=(-1)^{4n}(+1)^9=1$，而 $P_{结束}=(-1)^9=-1$，因此无论如何是不能实现的.

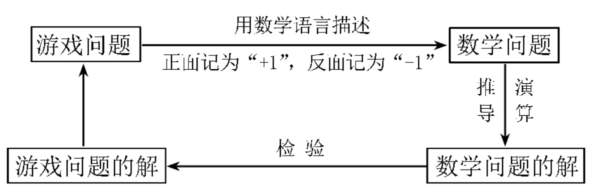
师：上述同学构造了不同的模式予以解释，那么这些想法的共同点是什么？

生$_{10}$：都把游戏问题变成数学问题.

生$_{11}$：生$_8$ 和生$_9$ 的解法基本相同，都转化为有理数的乘法.

生$_{12}$：把翻一次牌记为加上一个奇数或乘以一个“-1”，对一次操作看作一种运算.

师：同学们都说得很好，上述精彩的游戏背后其实质是数学问题，把游戏问题变成数学问题这一过程就是数学建模，我们可以用如下的框图表示：




### 1.3　拓展游戏模型，感悟数学思想

师：上述扑克牌游戏中，有的可以把正面朝上的全部变成朝下的，而有的不能，为什么？

生$_{13}$：与牌的张数有关.

生$_{14}$：不仅与扑克牌的张数有关，而且还与每轮次翻牌的张数有关.

师：那么你们能把上述的游戏推广到更一般吗？

（通过启发学，生认识到在游戏中扑克牌的张数和每次翻牌张数都是具体的数，学生很快意识到问题的一般性需要用字母表示数，得到如下的推广）

游戏 3：桌上有 $a$ 张正面向上的扑克牌，每次翻动其中任意 $b$ 张，使它们一面向上变为另一面向上，这样一直做下去，能否使 $a$ 张牌都反面朝上，请说明理由.

师：字母 $a$、$b$ 是任意数吗？

生$_{众}$：是正整数.

生$_{15}$：扑克牌的张数 $a$ 应大于每次翻牌 $b$ 的张数.

师：这位同学善于联系实际. 那么上述游戏 3 如何求解？

（学生深入思考，教师回顾游戏 2 是如何操作，启发学生把游戏问题转化为数学问题关键步骤的一步是什么？学生回顾了建模的基本框图后，教师整合了大部分学生的解答）

生$_{众}$：记扑克牌正面朝上为“+1”，反面朝上为“-1”，每次翻动一张牌为乘以“-1”，这样初始状态，可记作 $P_0=(+1)^a=1$. 翻动了 $n$ 次，每次为 $b$ 张，翻动 $n$ 次后的状态可记为：$P_n=P_0[(-1)^b]^n=(-1)^{bn}$，$P_{终结状态}=(-1)^a$，要使 $P_n=P_{终结}$，$(-1)^{bn}=(-1)^a$，等式成立，现对 $a$、$b$ 的奇偶性进行讨论. 当 $a$ 为奇数时，$b$ 为偶数时，在这种条件下，由于初始状态为 $+1$，而每次翻动偶数张牌之积又为 $+1$，不管怎样翻动都不会得到结果 $-1$，也就说不能把牌从正面朝上全部变成朝下的；当 $a$ 为奇数时，$b$ 为奇数时，初始状态为 $+1$，而每次翻动奇数张牌之积又为 $-1$，那么适当的翻牌可以使 $+1$ 变成 $-1$，这样就可以把牌从正面朝上全部变成朝下的；用同样的分析当 $a$ 为偶数时，$b$ 为奇数或偶数时，是可以把牌从正面全部变成反面.（师生共同总结得到下表）

| | $a$ 为偶数 | $a$ 为奇数 |
|---|---|---|
| $b$ 为偶数 | 能行 | 不行 |
| $b$ 为奇数 | 能行 | 能行 |

师：对于上述游戏 3，你还有什么疑问或问题吗？

生$_{16}$：对于游戏 1 最小次数是 3 次，上述推广到

一般情况，如果能进行翻牌，有无最小的次数操作呢?

生[17]: 最小次数又如何操作呢?

师: 上述两个问题非常好，由于时间关系，不能在一节课进行详细的展开，希望有兴趣的同学继续探索，可以通过网上查找资料和相关的文献，也可以参阅老师的拙文《巧用“±1”揭密翻牌游戏》[2].( 小结略)

## 2 如何发展学生的模型思想

数学建模活动能体验到数学与日常生活及其他学科的联系，感受数学的实用价值，增强应用意识，提高书本知识联系实际的学习态度和学习习惯. 正如姜伯驹院士说的那样，对于数学模型“谁用得好，谁就赢了”. 那么如何在数学课堂上进行数学模型思想的渗透，促进学生建模走向深入，逐步领悟模型思想的本质呢? 结合本节课的教学实践，笔者觉得可以努力做好以下几点.

### 2.1 为学生提供经历图式化或符号化的过程，感悟简约化、抽象思想

课的开始，老师介绍游戏后，突然歉意地说“老师忘带了扑克牌，我们还能继续这个游戏吗”，此时，学生提出各种的想法，有的用书代替扑克牌，有的用文字“正”、“反”代替扑克牌，有的用符号“+”、“-”或“0”、“1”等代替扑克牌”. 这样教师有意识从游戏的背景中，抽取有关的数学因素，让学生经历图式化和符号化的过程.

接着教师继续追问，“你喜欢哪一种符号替代”，“为什么可以用符号替代”. 学生体会到玩翻牌游戏的操作和玩符号操作是等价的，它们是同样的问题，不同的表达形式. 同一类问题，表征之间的转化，学生感悟到符号化、简约化，为下一步的抽象和建模作好了铺垫.

### 2.2 从游戏的各种状态和操作中发现关系和规律，感悟数学化、模型思想

从游戏 1 到游戏 2 是学生思维的难点，也是学生领会建模思想的有利契机. 在这个过程中，教师有意识放慢脚步，让学生从游戏的各种状态和操作的关系中，寻求数学的关系和规律，把游戏中的状态、操作和数学中的关系、原理实行对接. 有的学生把扑克牌的正、反面分别记为“+1”和“-1”，翻 1 张牌相当乘以一个“-1”，翻 4 张牌记为 4 个“-1”相乘，即 $(-1)^4$. 游戏的原始状态 $P_0=(+1)^9=1$. 设翻动 $n$ 轮，每轮翻动 4 张，用数学式子表示: $P_n=(-1)^{4n}P_0=1$，而游戏的终结状态为 $(-1)^9=-1$，因此无论如何是不能实现的; 有的学生用数学中的奇数和偶数解释，把游戏中牌的两种状态记为奇数、偶数，然后把翻一张牌等价于加上一个奇数，这样游戏中翻牌的问题转化为数学中的奇偶性计算问题.

通过对翻牌游戏规则解读，发现状态和操作中的关系和规律，寻求数学上的符号化和结构化，通过符号表征，用数学的语言重新编码问题，从而把游戏问题转化为数学问题，实现两者的等价，这个过程就是数学的抽象和建模的过程. “传统的数学教育重视应用题教学，但没有很好的发展学生数学建模能力和运用数学知识解决实际问题能力，因为它的建模和解决问题过程不完整”[4] 教材中大部分建模问题都是用自然语言书写成规范性问题，省略了对建模问题的抽象、概括、假设和转化这一环节，它是数学建模中最重要的一环，通过这一环节让学生感受到抽象、概括、假设和转化的必要性. 为此在游戏的教学中，教师有意识地让学生真切的感受到模型的抽象、概括和转化.

### 2.3 为学生提供经历多种建模的方法，体验模型思想的本质

在数学建模过程中，首先把生活中现实问题进行抽象、概括和符号化，转化成数学问题，在这个转化的过程中需要用数学语言( 包括图形、符号、公式) 把现实问题转化为数学结构完全形式化和符号化的数学问题. 由于学生用数学语言表述现实问题时，对现实问题的诠释不一样，翻译成数学问题也不一样，如游戏 2 学生有以下两种方法.

方法 1: 若扑克牌“正面向上”记为“奇数”，“反面向上”记为“偶数”，翻动一张牌记为加上 1 个“奇数”，翻动 4 张就相当于加上 4 个奇数. 初始状态 9 张扑克牌“正面向上”为奇数，终结状态 9 张扑克牌“反面向上”为偶数. 那么游戏 2 就转化成如下的数学问题“9 个奇数每次加上 4 个奇数后，它能变成 9 个全是偶数吗”.

方法 2: 把翻牌游戏转化为“+1”和“-1”相乘问题，具体见上述案例.

由于学生对于数或数量的敏锐直觉不同，那么表现出来的数感、符号意识、模型思想和推理能力等方面也不尽相同，得到的数学模型也不同，但不同的模型有利于从多侧面、多角度来思考数学对象各元素之间的关系，通过现实问题和数学问题的互译，能更好地理解模型间的相同点和不同点，在比较中加深对不同数学模型的优缺点的领会，进一步感悟模型思想的本质，逐步形成建模的抽象过程，积累建模

的经验.所以多种方法解决模型的环节对于学生更好地理解问题与结果有很好的帮助,这也为学生更深入地思考问题提供了可能性[3].

2.4 让学生经历发现和提出问题,加深模型思想的领会

爱因斯坦指出:"提出一个问题往往比解决一个问题更重要.因为解决问题也许仅仅是一个数学上或实验上的技能而已,而提出的新问题、新的可能性,从新的角度去看待旧的问题,却需有创造性的想象力."培养学生的抽象与提出问题的能力是发展模型思想的第一步[4].在游戏1教学之后,教师提出:"对于游戏1,你还有困惑吗?你还有新的问题吗?"在教师的启发下,学生有的提出了"6张扑克牌换成9张还行吗?",还有的提出了"每次翻动4张为3张".游戏3是游戏1、2的一般化.在此启发下,学生再次提出猜想:"有无最小次数,又如何操作呢?"游戏1中最小次数是3次就可以达到要求,游戏1的操作最小次数能否在一般层面再进行推广呢?

留出时间给学生思考和反思建模的过程,让学生感悟到扑克牌游戏中,有的可以把正面朝上的全部变成朝下的,而有的不能,为什么,让学生意识问题的所在,不仅与牌的张数有关,而且还与每轮次翻牌的张数有关.从而让学生把游戏从具体的操作推广到更一般.从建模的过程中培养学生的问题意识,发展学生的想象力,加深模型思想的领会.

对问题的推广实质上在深度理解该模型的基础上提出挑战性的思考,是进一步发展模型思想的关键.具体的问题推广到一般化,在课堂上教师要善于对抽象的问题进行具体的设问,有助于模型的一般化拓展.

参考文献

[1] 张思明.中学数学建模教学的实践与认识[J].数学通报,1996,06:29-33.
[2] 张安军.巧用"±1"揭密翻牌游戏[J].中等数学,2017,03:19-20.
[3] 杨慧娟等.如何发展学生的数学模型思想[J].数学通报,2016,10:33-35.
[4] 李昌官.给学生完整的中学数学教育[J].中小学教材教学,2017,09:25-28.

# 中澳初中数学教科书中的信息技术应用比较*

浙江师范大学教师教育学院 321004 任燕巧 张维忠

【摘 要】 以教科书中信息技术应用为切入点,借鉴并完善已有的信息技术应用框架,比较澳大利亚与中国两版初中数学教科书后发现:中澳教科书都重视信息技术与教科书的融合,在技术工具-硬件、呈现方式、知识领域三方面呈现相似趋势,在技术工具-软件、内容环节、应用形式三方面存在显著性差异.基于两者异同点的分析,得出如下启示:准确把握信息技术的功能定位;重视教科书技术应用的专题性学习;适当增加技术工具的多样性,提高重视程度;做到技术运用的与时俱进,培养时代所需的素养.

【关键词】 信息技术应用;数学教科书;比较

信息技术与教育的深度融合是当今教育信息化的价值追求.作为国际教育信息化风向标的美国新媒体联盟(New Media Consortium,简称NMC)发布的《2017地平线报告(基础教育版)》指出无处不在的技术和数字工具应以有意义的方式纳入学习中,提升数字化素养[1].澳大利亚教育、就业、培训和青年事务部长委员会(Ministerial Council on Education, Employment, and Youth Affairs,简称MCEEYA)发布澳大利亚青年教育目标,特别强调信息与通信技术(ICT)能力[2].信息技术在教育领域的价值日益凸显,各国也越来越重视信息技术.郭衎与曹一鸣分析了十四国数学课程标准中信息技术使用的提及率,发现澳大利亚(8.13%)与中国(6.34%)分别位居第二、三位[3].教科书是课程标准的重要载体,是教师教学与学生学习的重要资源,也是信息素养培养与能力提升的重要因素.通过比较我国与澳大利亚初中数学教科书中信息技术的应用,以期为我国初中数学教科书的完善与发展提供借鉴与启示.

## 1 研究设计

### 1.1 研究对象

* 基金项目:浙江省高等教育教学改革项目"研究导向的《数学课程与教材分析》课程改革实践"(jg20180068)