新旧交融时 “或”明则“不惑”

杨原明 （江苏省苏州工业园区教师发展中心 215021）

1 问题提出

当前某些省份的部分年级正处于新课标与旧教材共存状态，难免遇到解决某些问题的固有经验方法无法再使用的情况. 怎么办？数学的教学不只是经验传授，更是思考和创造. 本文从高一教学中一个问题说起，提出笔者的一些思考，与读者共勉.

新人教A版习题中出现了一个题：“x 或 y 为有理数是 xy 为有理数的既不充分也不必要条件”，问是真命题还是假命题？（习题1.4第3题(4)）学生完成起来普遍感觉困难，其难点在于无法准确理解“x 或 y 为有理数”. 考察教材和《教师教学用书》，本题承接的是例1(6)“x，y 为无理数不是 xy 为无理数的充分条件”、例2(6)“x，y 为无理数不是 xy 为无理数的必要条件”，合起来就是：x，y 为无理数是 xy 为无理数的既不充分也不必要条件. 学生很容易理解例题里的“且”，也很容易举出反例，可就是无法理解“或”.

如果是上一个版本的教材，这就是一个非常自然的“逆否命题与原命题互为等价命题”的应用. 利用这个结论，将原命题转化为“xy 为无理数是 x，y 为无理数的既不充分也不必要条件”，根据例1(6)和例2(6)，显然该命题为真命题. 但高中数学新课标面世后，“四种命题”“简单的逻辑联结词”从高中教学内容中消失，这道习题的命运将如何呢？或者，这一类问题将去向何方？随着四种命题一起消失？

2 问题分析

本题并不只有这一种解法. 追本溯源，此题本质上考查的是集合关系与运算. 这个问题完全可以等价转化为：已知集合 $A=\{(x,y)\mid x$ 或 y 为有理数$\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid xy$ 为有理数$\}$，则 $(x,y)\in A$ 是 $(x,y)\in B$ 的什么条件？

根据并集的定义，$A=\{(x,y)\mid x$ 或 y 为有理数$\}=\{(x,y)\mid x$ 为有理数$\}\cup\{(x,y)\mid y$ 为有理数$\}$，所以本题的难点在于如何准确理解二维状态下的集合运算. 若这个问题得不到解决，影响的将不只是本题这一类判断充要条件的问题. 事实上，在将来独立事件、独立重复试验部分的学习中，很多学生可能会误认为相互独立的两个事件 A，B 有且仅有一个发生的概率是 $P(A)+P(B)$，其根本原因就在于没有真正理解集合的并运算.

3 问题解决

从教材来看，对高一学生而言，有限数集和可以用区间表示的数集的运算掌握起来是比较自然的，也能帮助学生熟悉集合的符号语言，积累数学抽象的经验. 但教授交集概念之后，对教材给出的例3，完全可以在求完交集之后分析一下并集，让学生进一步加深对集合运算的理解，提高数学抽象素养.

3.1 并集的构成

立德中学开运动会，设 $A=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加百米赛跑的同学$\}$，集合 $B=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加跳高比赛的同学$\}$，求 $A\cap B$；变式：求 $A\cup B$.

教学中，此处的变式不要局限于 $A\cup B=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加百米赛跑或参加跳高比赛的同学$\}$，而应该借助Venn图，让学生发现集合 $A\cup B$ 是三个两两之间交集为空集的集合的并集：$A\cup B=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加百米赛跑且未参加跳高比赛的同学$\}\cup\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加跳高比赛且未参加百米赛跑的同学$\}\cup\{x\mid x$ 是立德中学高一年级既参加跳高比赛又参加百米赛跑的同学$\}$.

3.2 并事件的概率

此处还可以结合教材阅读材料，分析集合中元素个数的问题：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$. 教学中一般会用“$\mathrm{card}(A\cap B)$ 被加了两次”来说明最后为什么要减去 $\mathrm{card}(A\cap B)$，但结合Venn图，完全可以不引入差集概念，将集合 $A-B$，$B-A$ 分别记作 C，D，其中 $\mathrm{card}(C)=\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}(D)=\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，并且 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(C)+\mathrm{card}(D)+\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$. 这样的过程更接近刚上高中的高一学生的最近发展区，也更方便学生理解容斥原理.

由此，很自然地，在概率部分的学习中，并事件 $A\cup B$ 包含三个两两之间互斥的事件：A 发生且 B 发生、A 发生且 B 不发生、A 不发生且 B 发生，故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. 而两个事件 A，B 有且仅有一个发生包含的是后两种情况. 如果事件 A，B 互斥，则 A 与 B 不可能同时发生，则 $A\cup B$ 仅包含：A 发生且 B 不发生、A 不发生且 B 发

生，即 A 发生、B 发生，故事件 A,B 互斥时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3.3 充要条件的判断

回到最初的问题，$A=\{(x,y)\mid x$ 或 y 为有理数$\}=\{(x,y)\mid x$ 为有理数$\}\cup\{(x,y)\mid y$ 为有理数$\}=\{(x,y)\mid x$ 为有理数且 y 为有理数$\}\cup\{(x,y)\mid x$ 为有理数且 y 为无理数$\}\cup\{(x,y)\mid x$ 为无理数且 y 为有理数$\}$. 至此，问题转化为学生熟悉的含有“且”字的交集状态. 对 $B=\{(x,y)\mid xy$ 为有理数$\}$，先考察充分性，当 $(x,y)\in\{(x,y)\mid x$ 为有理数且 y 为无理数$\}$ 时，$(x,y)\notin B$，即充分性不成立；再看必要性，用反例说明，$(x,y)\in\{(x,y)\mid xy$ 为有理数$\}$ 时，可能 x 为无理数且 y 为无理数，此时 $(x,y)\notin A$，即必要性也不成立. 故 $(x,y)\in A$ 是 $(x,y)\in B$ 的既不充分也不必要条件，习题中 1.4 第 3 题(4) 中的命题是真命题.

3.4 触类旁通

教学中可以适当提供练习让学生自己分析. 事实上，有两个例子值得我们高度关注.

(1) $x=0$ 或 $y=0$ 是 $xy=0$ 的什么条件？将 $x=0$ 或 $y=0$ 划分为：$x=0$ 且 $y=0$；$x=0$ 且 $y\neq0$；$x\neq0$ 且 $y=0$. 很容易判断出 $x=0$ 或 $y=0$ 是 $xy=0$ 的充要条件，也能帮助学生更好地理解“x,y 中至少有一个为 0”的符号化表示“$xy=0$”.

(2) $x\neq0$ 或 $y\neq0$ 是 $x^2+y^2\neq0$ 的什么条件？与前面的例子同理，将 $x\neq0$ 或 $y\neq0$ 划分为：$x\neq0$ 且 $y\neq0$；$x=0$ 且 $y\neq0$；$x\neq0$ 且 $y=0$. 三种情况都会有 $x^2+y^2\neq0$，所以答案是充要条件. 同样，这也是一个帮助学生正确理解“不同时为零”并学会符号化表达的好机会——“不都是”作为公认的重点和难点，最后的一击即中必须是来源于平时的不断积累.

符号化表达是培养学生数学抽象素养的必备环节，所以说这两个例子有重要意义.

4 总结反思

问题本身很小，也很容易解决，但仍需要我们从中反思，为以后的教学提供一点借鉴.

4.1 并集的教学

并集的教学不应该忽略对运算本质的探究，这也正是集合运算区别于实数运算的地方. 用实数运算作类比，相似和不同点处都应该分析清楚，为高一学生以后使用类比的方法来学习新知识打下良好的基础. 应该说明的是，虽然我们提倡在教学中对类似二元变量类型的并集从自然语言表达、Venn 图等方法进行划分以使学生更好地理解并集概念，初步认识数学中的分类讨论思想，但并不要求把 De Morgan 定律作为结论来记忆和使用. 在新高一的教学中，教师应该谨慎把握符号化的程度，避免过度抽象和符号过多的表达，避免加重学生学习负担.

4.2 充要条件的教学

充要条件的教学，本身是为了培养学生的逻辑推理这一数学核心素养. 作为逻辑入门课，在教学中应注意由浅入深. 对本文涉及的问题，有教师补充了四种命题，根据课程标准和文献[2]，这种做法似有不足；有教师利用补集的想法来讲，也是可以的，但是不建议放在高一，而是可以在一轮复习时再自然地引入这个方法. 因为从思维层次来讲，对两个集合分别求补集、确定补集之间的关系、根据补集关系确定原集合之间的关系，再将集合关系转化为相应充要条件的判定，在抽离四种命题的前提下，对学生来说并不是个容易的思维过程. 故而，在目前的教材体系中，我们“被迫”深入挖掘并理清“或”的含义，从而解决集合、逻辑、概率这一系列问题. 当然，教材修订的本意未必全是如此，但这一问题的出现确实是我们解决概率学习中并事件理解困难的良机.

4.3 数学学科核心素养

从培养学生学习品质和数学学科核心素养的角度来讲，正难则反可以，但是搁置问题导致其成为痼疾绝不可取. 寻求最优策略无可厚非，但并不能因此就放弃其他的可能性，尤其是与未来学习有关的问题上. 事实已经证明，此处放弃对并集本质的分析，将导致学生在后续概率学习中出现理解上的偏差，甚至影响其日常生活中对相关语句的理解. 更何况，每个学生都有不同的思维方式，即使在上一版教材的教学中，也有学生追问：如果不用逆否命题，本题能不能解决？应该怎么解决？学习指向性教学和考试指向性教学最根本的区别是前者关注过程，后者更重视结果. 通过创造情境，让学生经历数学抽象的过程，远比直接将教师的经验传授给学生，让学生死记硬背来得更自然、更深刻.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2020：3-7.

[2] 人民教育出版社课程教材研究所，中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·数学(A 版·必修第一册)[M]. 北京：人民教育出版社，2020：10-35.

[3] 王嵘. 作为语言来学习，发展数学抽象素养和逻辑推理素养——人教 A 版《普通高中教科书·数学》第一章“集合与常用逻辑用语”介绍[J]. 中学数学教学参考，2020(9)：12-13，24.