

# 高中生数学逻辑推理能力发展水平调查研究

朱立明, 柯珊, 武丽莎

**摘要:**逻辑推理能力是高中生数学关键能力之一,指向数学学科的严谨性特征,逻辑推理能力的培养有助于学生数学素养的形成。逻辑推理能力涵盖数量关系与空间图形两个横向维度,可以划分为识别与理解、概括与猜想、探索与论证三个纵向水平。为调查高中生逻辑推理能力发展水平,本研究调查分析5个城市的15所学校2171名高中生在逻辑推理能力上的表现,得出如下结论:高中生逻辑推理能力整体发展水平表现不佳,随着年级增长呈现进阶式发展;高中生逻辑推理能力在数量关系与空间图形两个维度上呈现非均衡性;高中生在逻辑推理的纵向水平上发展不平衡。

**关键词:**数学学科核心素养;逻辑推理能力;数学关键能力

**中图分类号:**G633.6 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-7228(2020)04-0018-06

**DOI:**10.16826/j.cnki.1009-7228.2020.04.004

**引用格式:**朱立明,柯珊,武丽莎.高中生数学逻辑推理能力发展水平调查研究[J].天津师范大学学报(基础教育版),2020(4).

## 一、问题提出

2017年9月,中共中央办公厅 国务院办公厅印发《关于深化教育体制机制改革的意见》,提出强化学生的关键能力培养,重点培养学生的认知能力、合作能力、创新能力与职业能力。各学科教学如何支撑学生关键能力的形成与发展成为课程改革的重要问题。2018年1月,《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称“新课标”)中凝练了数学学科核心素养<sup>[1](P4)</sup>,6个数学学科核心素养在数学学科本质上蕴涵了6种数学关键能力。《普通高中课程方案(2017年版)》的培养目标也突破了对数学知识的考察,开始由知识取向的评价走向能力取向的评价,这种能力就是数学学科核心素养下的数学关键能力,在2019年的高考数学中已经开始对数学关键能力进行测评。本研究主要基于高中生逻辑推理能力,旨在解决如下三个问题:第一,高中生逻辑推理能力整体水平如何?第二,高中生逻辑推理能力在横向维度与纵向水平的整体状况如何?第三,不同年级之间学生逻辑推理能力在横向维度与纵向水平是否存在差异?这些问题的解决,可以在一定程度上为高中生逻辑推理能力的培养与评价提供数据支撑与策略引导。

## 二、逻辑推理能力测评的研究述评

逻辑推理能力测评是检验其落实状况有力“抓手”,学界认为,关于逻辑推理能力评价的成败在于能否编制符合我国学生学情的逻辑推理能力的测试题。目前关于逻辑推理能力测评的理论探析和实证研究的论文不多,随着“新课标”的颁布,关于逻辑推理能力测评的研究开始出现,尤其是对其现状调查的研究,更多集中于硕、博论文之中。通过梳理发现,对于逻辑推理能力测评的研究主要集中以下三点:第一,逻辑推理能力测评的指标或模型的构建,例如,喻平通过对“新课标”数学学科核心素养测评框架的分析,指出其中的不足之处,在布卢姆认知评价理论、PISA评价模型、SOLO评价模型的基础上,构建了能力维度、水平维度、内容维度的三维度测评模型,并提出测评试题编制要注重题目设计形式多样化、问题情境设置合情化、能力水平分布合理化。<sup>[2]</sup>何小亚从数学素养的视角出发,在分析数学素养指标之后,对逻辑推理能力进行构建,指出学生逻辑推理能力由一个或几个已知判断得出一个新的数学判断的思维形式,包括演绎推理与合情推理。<sup>[3]</sup>第二,逻辑推理能力现状评价研究,此类研究大部分是硕博论文。例如,林玉慈基于“新课标”中逻辑推理的三

收稿日期:2020-05-23

作者简介:朱立明,唐山师范学院(河北唐山063000)教育学院讲师,博士;柯珊,北京市海淀区教师进修学校课程指导中心中学一级教师,博士;武丽莎,唐山师范学院数学与计算科学学院助教。

基金项目:河北省社会科学基金青年项目“高中生数学关键能力与课程标准一致性研究”(HB18JY053)。

个水平设计试卷,对四所学校的805名高中生的逻辑推理素养进行测试,得出相关结论:(1)高中生逻辑推理素养水平整体不理想;(2)高中生逻辑推理水平随年级逐步增强;(3)高一年级与高二年级、高一年级与高三年级间的水平有显著性差异,高二年级与高三年级间的水平无显著性差异;(4)高中所有年级学生的逻辑推理素养都能达到水平一,近三分之二左右的学生能达到水平二,但极少学生能达到水平三。<sup>[4]</sup>程靖等采用分层抽样法,对8个城市1217名八年级学生,从推理类型、推理内容、推理水平三个维度进行调查,结果显示,虽然部分学生在测试中表现较好,但是整体上处于初级水平,不存在显著的性别差异。<sup>[5]</sup>第三,学生逻辑推理能力发展“关键期”研究,小学阶段学生逻辑推理能力发展关键期是三至五年级,初中阶段学生逻辑推理能力发展关键期是八年级,高中阶段学生逻辑推理能力发展关键期是高二年级。<sup>[6]</sup>

我国数学教育忽视对数学能力的判断,注重对外在行为的监测,忽视对内心倾向的透视,很难对高中生逻辑推理能力层面进行科学、合理的测评,难以保证测评结果之合理性与客观性,即使有些测量已经开始关注学生逻辑推理能力测评框架的构建,在数学教学实践中也具有一定的困难。<sup>[7]</sup>长期以来,我国数学教育评价更多关注学生对数学知识与技能的掌握,忽视学生数学思维与能力的考察,我们对学生逻辑推理能力的测评研究还处于起步阶段。

### 三、逻辑推理能力测评框架的构建

“新课标”指出,数学学科核心素养是具有数学基本特征的数学思维品质、关键能力以及情感、态度、价值观的综合体现,凝练了逻辑推理素养,将其界定为对数量关系与空间图形的素养。逻辑推理素养中蕴含了逻辑推理能力,逻辑推理能力是指从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题的能力。主要包含两类,一类是由一般到特殊的推理,例如演绎推理;一类是由特殊到一般的推理,例如归纳与类比。逻辑推理能力具有不同的水平,可以对其进行进阶描述。根据“新课标”中关于逻辑推理素养水平的阐述,交流与反思更多需要在课堂教学中进行观察,因此,本研究聚焦其数学关键能力范畴,选取可量化测评的水平描述,将逻辑推理能力测评描述为“3+3+2”模式,如图1所示,第一个“3”指逻辑推理能力包含归纳、类比、演绎三个构成要素,第二个“3”指逻辑推理包含识别与理解、概括与猜想、探索与论证三个纵向水平,“2”指逻辑推理能力包含数量关系与空间图形两个横向维度。

下面,针对高中生逻辑推理能力的识别与理解、概括与猜想、探索与论证三个纵向水平进行具体阐述,如

表1所示。

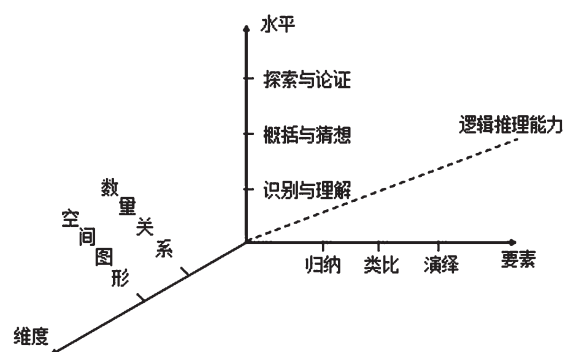


图1 逻辑推理能力测评框架“3+3+2”模式

表1. 高中生逻辑推理能力分析框架

横向 维度	纵向水平		
	识别与理解	概括与猜想	探索与论证
数量 关系	在情境中识别归纳、类比与演绎三种推理形式,借助具体例子理解三种推理形式,利用归纳与类比发现简单的性质与关系。	能够分析、把握条件与结论之间的逻辑关系,借助归纳与类比获得命题与猜想,可以利用反例说明结论不能够成立。	提出假设前提,推断结论,探索论证途径,构造过渡性数学命题,用严谨的数学语言表达论证过程。
空间 图形			

## 四、研究方法与设计

### (一)研究假设

本研究基于以下两个假设:其一,高中生逻辑推理能力的发展与年龄因素有关,年龄因素可以由年级来表现,具体表现高中阶段年级的变化,教师专业素养、教学风格以及课外辅导等因素不在本研究考虑范围之内;其二,高中生逻辑推理能力的发展水平可以通过学生测试卷的总平均分来反映,同时还受到逻辑推理能力各维度测评状况的影响。

### (二)研究方法的确定

根据逻辑推理能力的分析框架与研究假设,本研究利用专家咨询对所构建的逻辑推理能力的纵向水平进行检验、调整,以保证其合理性与科学性,再根据分析框架编制测评问卷,采用问卷调查法调查高中生逻辑推理能力发展水平。专家结构包括高等院校的数学教育理论研究者、中学教研员以及教学一线的教师,这样的结构对于高中生逻辑推理能力水平的划分既有理论的指导,又能从教学实践出发,符合学生在实际学习中的表现。

### (三)测评问卷的编制

本研究采用自编的测评问卷对高中生逻辑推理能

力进行测评,问卷设计依据题型设计的基本原理与题项选择的基本原则。由于本研究旨在对高中生逻辑推理能力的测评,不能仅仅停留在知识层面的考察,还要涉及学生的思维,因此,测试题依据“新课标”要求控制题项难度,依据教学内容减少知识干扰,依据学生特征确定题项来源,依据水平划分调节题项梯度。对高中生逻辑推理能力进行测评的难点在于,单纯以学生学过的知识为背景,难以体现其逻辑推理能力,因此,我们尽量选取与所学知识相关不大的内容编制测试卷,测评试卷从数量关系与空间图形两个维度,围绕类比、归纳与演绎推理来设计问题,关照三个纵向水平,经过三次调整,最终形成测评问卷,问卷中包含18个测评题项,每个水平设计3个题项,数量关系与空间图形各9个题项。

在正式测评前,通过试测对测评问卷的信度与效度进行检验。测评问卷的信度可见表2,各水平题项信度均大于0.7,问卷的整体信度大于0.8,测评问卷的 $\alpha$ 信度指标基本达到了测量学要求,各水平题项测评之间具有很高的-致性,可以进行团体测评。<sup>[8](P237)</sup>

表2. 逻辑推理能力测评问卷信度表

逻辑推理能力纵向水平	Cronbach's Alpha 值
识别与理解	0.805
概括与猜想	0.764
探索与论证	0.799
整套测试卷	0.822

效度主要考察内容效度与结构效度。在内容效度上,采用专家咨询的方式,结合一线特级教师的教学经验,判断各题项的实际测量的内容与水平,制定双向细目表,来提升内容效度。在结构效度上,采用因素分析法,测评问卷旋转后的因素负荷矩阵和累积解释变异量表明提取的三个因素(识别与理解、概括与猜想、探索与论证)的特征值分别是3.527、2.770、1.432,累积解释变异量为67.486%,对整个测评问卷的有效程度较好,逻辑推理能力的识别与理解、概括与猜想、探索与论证的三个水平在结构上具有很好的稳定性和独立性,问卷的内部结构较为理想,其建构效度较好。

通过相关分析来检验各水平之间是否存在相关性,相关系数矩阵如表3所示,结果显示,三个水平之间的相关系数在0.457-0.707之间,表现为中等相关。各水平与问卷总体的相关系数在0.631-0.790之间,均表现为中等相关或强相关,达到测评标准。

#### (四)研究样本的遴选

考虑样本的代表性与方便性,以唐山、承德、石家

表3. 各水平之间的相关系数矩阵

	识别与理解	概括与猜想	探索与论证	总测评问卷
识别与理解	1.000			
概括与猜想	0.624	1.000		
探索与论证	0.457	0.707	1.000	
总测评问卷	0.631	0.713	0.790	1.000

庄、衡水、张家口等为样本城市,根据每个样本城市学校的生源水平、师资状况、软件条件、硬件设施、学校管理等因素,将样本学校分成三类,一类是优质学校,二类是中等学校,三类是薄弱学校。每个样本城市选取三所样本学校,再从每类样本学校中选取高一至高二的中等年级的学生作为测试对象,共发放测评问卷2269份,回收测评问卷2269份,有效问卷2171,有效率是95.7%,学生样本分布如表4所示。

表4. 高中生逻辑推理能力调查样本分布

学校类型	年级	年级个数	人数 (有效人数)	总人数 (有效人数)
优质学校	高一	5	237(231)	751(732)
	高二	5	265(257)	
	高三	5	249(244)	
中等学校	高一	5	258(247)	756(724)
	高二	5	254(243)	
	高三	5	244(234)	
薄弱学校	高一	5	262(245)	762(715)
	高二	5	259(241)	
	高三	5	241(229)	

#### (五)数据分析的标准

各年级均采用现场测评的方式,高一与高二年级学生在第二学期测评,为避免高考的压力,高三年级学生在第一学期进行测评,测试题由学生独立完成,大约需50分钟左右。学生测评问卷的评分由一名高校教师和两名高中数学教师共同完成。首先,三名教师共同制定详细的评分标准和细则,为尽量避免由评分者主观判断带来的偏差,每道测评题项最低分为0分,最高分为5分,包含0、1、2、3、4、5六个分值,问卷满分为90分。这种方法直观、简洁,既方便评分,又便于数据的收集与分析。然后,由两名高中数学教师合作完成评分,不一致的评分再由第三个教师进行仲裁,教师评分在95%以上一致,一致性程度较高。



## 五、研究结果

本研究主要利用SPSS22.0进行数据处理,主要得到以下四个研究结果。

### (一)高中生逻辑推理能力的发展态势

由图2可知,高一年级学生的平均分是40.04分,得分率为44.49%;高二年级学生的平均分是44.03分,得分率为48.92%;高三年级学生的平均分是45.46分,得分率为50.51%。高一年级到高二年级上升比较明显(从40.04到44.03,提高3.99分),高二年级高三年级上升比较缓慢(从44.03到45.46,提高1.43分)。整体看,高中生逻辑推理能力的平均分虽然随着年级的增长而升高,但三个年级的平均得分都没有达到合格水平(满分为90分,合格分数为54分),高一年级与高二年级学生的得分率低于50%,高三年级学生的得分率也是略高于50%。

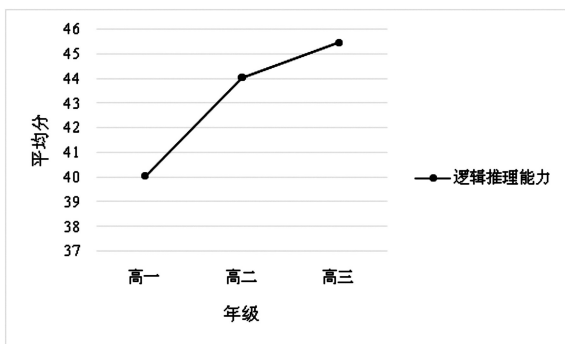


图2 高中生逻辑推理能力整体发展状况图

(二)高中生在逻辑推理能力的横向维度与纵向水平发展态势

#### 1. 高中生在横向维度上的发展态势

从图3中可以看出,高中生逻辑推理能力在空间图形维度的得分高于在数量关系维度的得分。高一年级学生逻辑推理能力在数量关系与空间图形两个维度的得分差别不大,空间图形维度得分(20.08)略高于数量关系维度的得分(19.96),而高二、高三年级在空间图形维度的得分明显高于数量关系的得分。无论是数量关系维度还是空间图形维度,三个年级的得分均依次升高,高一年级到高二年级提升幅度差别较大,空间图形维度上升幅度(从19.96到21.54,提升1.58)明显大于数量关系维度上升幅度(从20.08到22.49,提升2.41),而高二年级到高三年级上升幅度差别不大,空间图形维度提升幅度(从21.54到22.28,提升0.74)明显大于数量关系维度上升幅度(从22.49到23.18,提升0.69),两者呈现“平行”发展趋势。可以看出,无论是数量关系维度还是空间形式维度,高二年级到高三年级变化并不大,这可能是因为高三年级选择第一学期开学初进行测评,因此,两者差异不大。

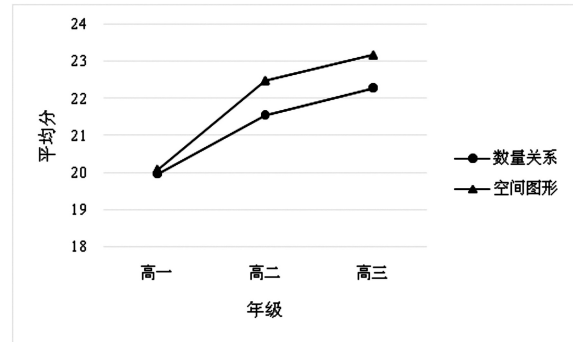


图3 高中生在逻辑推理能力横向维度上的发展状况图

#### 2. 高中生在纵向水平上的发展态势

从图4可以看出,高中生的逻辑推理能力在识别与理解、概括与猜想、探索与论证三个水平上得分依次升高,高中三个年级学生逻辑推理能力表现为水平越高,得分越低,概括与猜想水平和识别与理解水平得分明显高于探索与论证水平。在识别与理解水平,高一年级到高二年级上升幅度(从18.12到18.38,提升0.26)与高二年级到高三年级上升幅度(从18.38到18.7,提升0.32)差异不大,呈现出“直线式”缓慢上升趋势。在概括与猜想水平上,高一年级到高二年级的上升幅度(从14.61到17.05,提升2.44)比高二年级到高三年级的上升幅度大。在探索与论证水平,高一年级到高二年级的上升幅度较大(从7.31到8.6,上升1.29),高二年级到高三年级上升平稳(从8.6到8.74,上升0.14)。

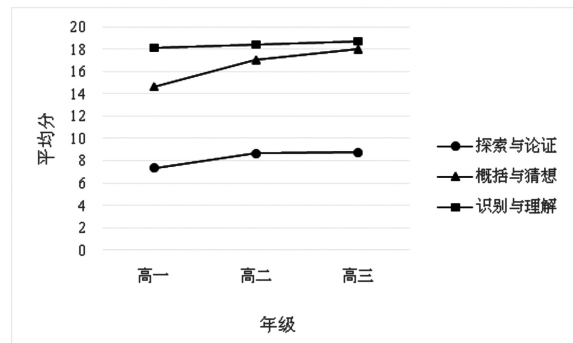


图4 高中生在逻辑推理能力纵向水平上的发展状况图

(三)不同年级学生在逻辑推理能力横向维度上的差异

在了解学生逻辑推理能力整体发展态势的基础上,对于不同年级学生在逻辑推理能力横向维度上的差异,也需要检验。利用方差分析对其检验,结果如表5所示。可以看出,不同年级学生在数量关系与空间图形上均存在显著差异。为进一步说明两个年级之间在横向维度上的具体差异,采用LSD法进行多重比较,在数量关系维度,高一年级与高二年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高一年级与高三年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高二年级与高三年级学生之间不存在显著差

异( $p>0.05$ );在空间图形维度,高一年级与高二年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高一年级与高三年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高二年级与高三年级学生之间不存在显著差异( $p>0.05$ )。在数量关系与空间图形两个维度上高三年级学生得分最高,高二年级学生得分次之,高一年级学生得最低,三个年级学生在数量关系与空间图形两个维度的得分率均超过60%。

表5. 不同年级的学生在横向维度上的差异

横向维度	年级	平均分	得分率 (%)	标准差	F值
数量关系	高一年级	19.96	66.53	1.29	
	高二年级	21.54	71.80	1.34	
	高三年级	22.28	74.27	2.09	6.078*
空间图形	高一年级	20.08	66.93	2.37	
	高二年级	22.49	74.97	1.68	
	高三年级	23.18	77.27	1.22	5.027*

注:\*表示 $p<0.05$

(四)不同年级学生在逻辑推理能力纵向水平上的差异

为了了解不同年级学生在逻辑推理能力纵向水平上的差异,三个年级学生的纵向水平进行方差分析。从表6可以看出,不同年级学生在识别与理解水平没有显著差异,而在概括与猜想水平、探索与论证水平都存在显著差异。下面采用LSD法进行多重比较,在识别与理解水平方面,高一年级与高二年级之间不存在显著差异( $p>0.05$ ),高一年级与高三年级之间不存在显著差异( $p>0.05$ ),高二年级与高三年级学生之间不存在显著差异( $p>0.05$ );在概括与猜想水平方面,高一年级与高二年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高一年级与高三年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高二年级与高三年级学生之间存在显著差异( $p<0.05$ );在探索与论证水平方面,高一年级与高二年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高一年级与高三年级之间存在显著差异( $p<0.05$ ),高二年级与高三年级学生之间不存在显著差异( $p>0.05$ )。在识别与理解水平上,三个年级的得分率均超过60%,概括与猜想水平上,只有高三年级得分率超过60%,而在探索与论证水平上,三个年级的得分率最低,均低于30%,这说明三个年级都不能很好地达到探索与论证水平。

## 六、研究结论

(一)高中生逻辑推理能力发展水平整体表现不佳

表6. 不同年级的学生在纵向水平上的差异

纵向水平	年级	平均分	得分率 (%)	标准差	F值
识别与理解	高一年级	18.12	60.40	1.06	
	高二年级	18.38	61.27	2.45	
	高三年级	18.70	62.33	1.85	1.212
概括与猜想	高一年级	14.61	48.70	2.91	
	高二年级	17.05	56.83	3.37	
	高三年级	18.02	60.07	2.56	3.784*
探索与论证	高一年级	7.31	24.35	3.28	
	高二年级	8.60	28.67	2.95	
	高三年级	8.74	29.89	1.88	5.953*

注:\*表示 $p<0.05$

从测试成绩来看,高中生逻辑推理能力整体发展水平偏低,与“新课标”中对逻辑推理的要求来看,三个年级的学生表现得均不理想,例如高中生对类比推理的问题回答都不是很好,尤其是对于数量关系的类比推理,这是因为学生缺少从两个类似事物中发现共性的能力。从得分率来看,高一、高二年级学生逻辑推理能力的平均得分率低于50%,而高三年级学生的得分率也是略微高于50%(50.51%)。这可能与逻辑推理能力本身的特征有关系,逻辑推理能力在一定程度上反映了数学的严谨性,其对象是数学命题,又包含了数学概念、规律、定理、事实等各方面内容,从学理层面增加了难度。

### (二)高中生逻辑推理能力呈现进阶式发展

高中生逻辑推理能力在其发展过程中,呈现进阶性,具体表现为从简单到复杂,从单一到联结,从形式到本质的改变,这与学生在高中阶段不断积累是有关联的。不同年级学生在逻辑推理能力上的成绩是有差异的,在数量关系维度与空间图形维度存在差异,在概括与猜想水平、探索与论证水平存在差异,在识别与理解水平上不存在差异。高中生逻辑推理能力与年级有关,其发展水平随着年级的增长逐渐增强。由于高中生逻辑推理能力发展呈现进阶性,因此,可以根据高中生所在年级特征,制定具有针对性的教学设计,选择适切性的教学方法,这对于培养学生的逻辑推理能力,具有重要的指导意义。

### (三)高中生逻辑推理能力发展不均衡

高中生逻辑推理能力在横向维度与纵向水平上都呈现不均衡发展。首先,高中生在空间图形维度上的表现比数量关系维度要好,这可能是数量关系自身的抽象性,增加了学生推理的难度,而空间图形更加直观,形象直观的图形更有利于学生发现规律,获得猜

想。第二,在纵向水平上,从测评成绩来看,探索与论证水平远远劣于识别与理解水平、概括与猜想水平。高中生在识别与理解、概括与猜想、探索与论证三个水平上的平均得分率分别是61.33%,55.20%,27.64%,有将近三分之二的学生可以达到识别与理解水平,有二分之一左右的学生达到概括与猜想水平,而不足三分之一的学生可以达到探索与论证水平。

**参考文献:**

- [1] 教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.  
[2] 喻平.数学关键能力测验试题编制:理论与方法[J].数学通报,2019(12).  
[3] 何小亚.学生“数学素养”指标的理论分析[J].数学教育学

报,2015(1).

- [4] 林玉慈.高中数学课程中的逻辑推理及教学策略研究[D].长春:东北师范大学博士毕业论文,2019.  
[5] 程靖,孙婷,鲍建生.我国八年级学生数学推理论证能力的调查研究[J].课程·教材·教法,2016(4).  
[6] 王志玲,王建磐.中国数学逻辑推理研究的回顾与反思——基于“中国知网”文献的计量分析[J].数学教育学报,2018(4).  
[7] 朱立明.高中生数学关键能力研究的追溯与前瞻[J].天津师范大学学报(基础教育版),2019(4).  
[8] 吴明隆.问卷统计与分析务实——SPSS的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010.

[责任编辑:岳俊冰]

## A Survey on the Development Level of Mathematical Logic Reasoning Ability in Senior High School Students

ZHU Liming, KE Shan, WU Lisha

**Abstract:** Logical reasoning ability is one of the key abilities of high school students in mathematics, pointing to the rigor of mathematics, and the cultivation of logical reasoning ability is conducive to the formation of students' mathematical competences. Logical reasoning ability covers two horizontal dimensions of quantitative relation and spatial figure, which can be divided into three vertical levels: recognition and understanding, generalization and conjecture, exploration and demonstration. To investigate the development level of logical reasoning ability of high school students, this study investigated and analyzed the performance of logical reasoning ability of 2171 high school students in 15 schools in 5 cities. The conclusion is as follows: the overall level of logical reasoning ability of senior high school students is relatively low, showing a progressive development trend with the growth of grade; the logical reasoning ability of senior high school students is unbalanced in two dimensions: quantitative relation and spatial graph. High school students develop unevenly at the vertical level of logical reasoning.

**Key Words:** the key competences of mathematics; logical reasoning ability; mathematics key ability