ISSN 0488-7395

数学通讯

SHUXUE TONGXUN

主管：中华人民共和国教育部
主办：华中师范大学　湖北省数学学会　武汉数学学会

ISSN 0488-7395
10>
9 770488 739198

2019. 5 下半月

数学通讯

（半月刊）

2019年5月下半月（教师）

总第807期

2019年5月15日出版

ISSN 0488－7395

CN 42－1152/O1

主　　管　中华人民共和国教育部

主　　办　华中师范大学　湖北省数学学会　武汉市数学学会

编辑出版　《数学通讯》编辑部

（地址：武汉华中师范大学

邮编：430079

电话：027～67867454）

网址：http://www.shuxuetongxun.com

E－mail:shxtxjsh@163.com

发行单位　武汉市邮政局

订阅单位　全国各地邮政局（所）

发行范围　公开发行

印刷单位　武汉珞珈山学苑印刷有限公司

敬告作者

多年以来，《数学通讯》一直得到广大作者的关心和支持，你们提供的优秀稿源是期刊的生存之本，我刊由衷地感谢.

由于来稿较多，无法对稿件的处理情况一一回复作者. 为了方便作者了解稿件的审查情况，我们在《数学通讯》网站（网址：http://www.shuxuetongxun.com）首页设置了稿件查询系统，稿件查询系统的使用方法详见“投稿需知”.

稿件的审查和录用情况一律以在稿件查询系统中查询到的结果为准。已经确定录用的稿件，我们将在网站上公布（不再另发书面录用通知）.

请勿一稿多投，一旦核实，将在一年内中止审理该作者的所有来稿.

谢谢各位作者的理解、配合和合作！

目　　次

·辅教导学·

教育教学研究

多元表征寻拓展 领悟题魂求变化——“隐圆问题”微专题复习课及思考 …………张安林　张　俊(1)

基于问题导向的高中数学核心素养培养策略 ………………于莺彬(4)

基于数学核心素养的课堂教学研究——以一道统计案例的教学为例 ………………王洪军(8)

PCK视角下的概念知识解析与教学难点突破——以“函数的零点”为例 ………………钱　健(11)

教学参考

基于数学学科核心素养视角下的深度教学 ………董荣森　张建良(14)

教会学生思考 提升课堂质量——基于“任意角的三角函数”同课异构评析 ………………陈小艳　周思波(17)

传播数学文化 启迪数学思维——以高三数学复习课《再探极限思想》为例 ………………顾彦琼(21)

解题方法

分享探究一个模拟题的心路历程 …………………查晓东　陶　晖(24)

2018年浙沪高考数学卷解析几何题小议 ………………童永健(26)

也谈一组向量问题的解法 ………………邵明宪(28)

·专论荟萃·

利用图象法分析一阶递推数列的有界性 …………………张莘钿　胡典顺(31)

椭圆的切线性质再探 ………………吴荣华(34)

也谈椭圆的一个性质 ………………敬加义　王翠华(37)

·复习参考·

透析高考命题方向 优化三角复习方略 ………………崔绪春(40)

指向数学文化渗透的试题命制——以一道高考“解析几何”模拟试题的命制为例 ………………王永生(46)

素养导向下2018年高考数学全国卷Ⅰ理科第20题回望 …………阳志长(51)

我为高考设计题目(题283～285) ………………翟洪亮　王甜甜　张　俊(55)

·课外园地·

从一道竞赛题的解法改进感悟命题与解题 ………………田　辉(59)

2017年湖北高中数学预赛第7题的类似 ………………杨志明(64)

关于举办2019年数学奥林匹克教练员等级证书培训班的通知 ……………(封四)

开展第十九届高中生数学论文竞赛的公告 ………………(封四)

多元表征寻拓展　领悟题魂求变化
——“隐圆问题”微专题复习课及思考

张安林　张　俊
(江苏省兴化市教育局教研室，225700)

圆是江苏省高考数学八个 C 级考点之一，对它的考查主要聚焦于点和圆、直线和圆以及圆和圆的位置关系方面的计算和证明. 近年来，对圆的考查力度逐年加大，难度日益增加，考查方式也日趋隐蔽. 题目往往要求学生发现题中隐藏的圆(简称隐圆)，再基于此圆解决相关问题. 以江苏省高考试题举例，2008 年第 13 题、2013 年第 17 题、2016 年第 18 题、2017 年第 13 题都可归类于隐圆问题，而各地模拟考试试卷中这类问题更是屡见不鲜，它们往往以难题的面目出现在试卷的关键位置，成为学生获取高分的拦路虎.

正因为此，各地高三复习研讨会中，经常以“隐圆问题”为课题开设微专题复习公开课. 就笔者所听过的同课题课中，大多以一道经典题为引，由浅入深或分门别类地选择典型例题组织教学. 近日，我市组织了一次高三复习对外教学展示活动，笔者指导青年教师 G 老师开设的该课题公开课，得到了听课同行的一致好评. 这节课从数学研究的基本方法出发，基于圆的不同表征，驱动新知生成；基于典型例题的变式，串联课堂教学. 这样既关注数学的内部发展，使得教学富有“探索味”，又关注学生的主动生成，使得教学富有趣味性. 下面给出教学的设计流程，供老师们研讨.

1　设计流程与思考

1.1　开放问题　多元表征

教师提出问题：在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=2$，能否添加一个条件，使得点 C 在以 AB 为直径的圆上运动？

设计意图　起始问题以开放题的形式呈现，一方面使课堂组织活泼生动，激发学生兴趣，另一方面降低进入门槛，让学生更容易“走进门”来，充分调动学生主体参与数学活动的积极性.

由于问题起点低，学生很快能回答，教师根据学生所答归纳整理后板书于黑板的左侧：

(1) $\angle C=90^{\circ}$；

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$；

(3) $AC^2+BC^2=4$；

(4) 将 $\triangle ABC$ 置于以直线 AB 为 x 轴的坐标系中，$k_{AC}k_{BC}=-1$；

(5) $\tan A\tan B=1$.

事实上，(1)(2)(3)(4)(5) 都是点 C 在以 AB 为直径的圆上运动这一几何形态的不同代数表征. “表征”是一个心理学名词，是指外部事物在心理活动中的内部再现. 数学本身的特征决定了数学的表现形式是丰富多样的，表征能力的高低反映了学生知识理解的深浅，解题能力的强弱对问题的解决影响巨大. 在教学中，有意识地为学生创造多元表征同一数学对象的机会，能有效帮助他们沟通不同知识间的联系，形成系统思维模式. 解题时自然能轻松激活有效的知识块，灵活调取相关内容解决问题.

1.2　基于表征　联想拓展

教师手指板书中的“(1) $\angle C=90^{\circ}$”提问：如果 $\angle C$ 不是直角，改成其他角度的角，比如 60°，点 C 还在圆上运动吗？

这是基于学生已有几何知识的提问，学生齐答：还在圆上运动，不过此时边 AB 不是直径，而是一条弦. 教师进一步追问：我们放宽条件，不要求边 AB 一定是直径，将(2)中的数字 0 换成其他数字，点 C 是否在圆上运动呢？

学生无法直接回答，教师提醒学生换一个数字具体研究一下. 片刻后询问学生，或答是，或答否.

教师追问背后的原因后引导学生研究一般情形，通过将数字 0 字母化为 λ 去追寻缘由，并强调用解析法来处理问题. 稍后，教师综合学生的结果板书：设 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda$，当 $\lambda>-1$ 时，点 C 在圆上运动.

设计意图　意在让学生联想一般与特殊的关系，感受条件的加强与弱化的思考经验，形成特殊到一般的弱化意识和探究的欲望. 通过这样的从特殊

到一般的探究活动,帮助学生积累“联想 → 特殊化 → 一般化 → 证明”的数学研究基本方法的经验,深化理解,提升思维.

有了刚才的研究经验,教师提出让学生将(3)(4)(5)也一般化后进行探索.探索前,教师问学生:3 个表征中,能否少研究一种?学生短暂思考后指出(4)(5)形异质同,只需研究(4)即可.为了节约课堂时间,教师安排同桌之间分别探索(3)(4)的一般情形,并互相交流.

运用解析法,学生很快获得结果,教师组织学生汇报成果.对于(3),有类似于(2)一般化后的结论:设 $AC^2+BC^2=\lambda$,当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时,点 C 在圆上运动.对于(4),一般化为 $k_{AC}k_{BC}=\lambda$ 后,点 C 的轨迹并不一定是圆,随着 λ 取值的不同,既可能是椭圆,也可能是双曲线.虽然与预想不同,但无心插柳,亦有意外之获,让学生体会到数学探究并不总是一帆风顺,探索路上常有意想不到的惊喜.

为了将学生的思考引向深入,教师指着(3)问:能否从另一角度将 $AC^2+BC^2=4$ 一般化?在教师的启发下,学生明白 AC^2,BC^2 的系数不一定都为 1,比如可以是 $2AC^2-BC^2=4$.通过亲身探索,学生发现 $\lambda AC^2+\mu BC^2$ 等于常数时有可能是圆.

1.3 典题变式 揭示本质

教师利用几何画板呈现“$\triangle ABC$ 中,$AB=2$,$\angle C=60°$”时的图形,拖动点 C,问学生:当点 C 变化时,$\triangle ABC$ 的面积是否存在最大值?在学生正确回答的基础上,追问:如果将 $\angle C=60°$ 更换为其他条件,比如 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$ 或 $AC^2+BC^2=6$,$\triangle ABC$ 的面积是否仍然存在最大值?

基于前面的探索,学生借助于点 C 的轨迹是圆,轻松地作了回答,此时教师出示例题.

例题 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=2$,$AC=\sqrt{2}BC$,求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

这道题是 2008 年江苏高考数学卷第 13 题,从形式看与刚才提问的问题如出一辙.运用前面探索过程中一直使用的解析法,学生很快发现点 C 的轨迹是圆心在直线 AB 上的圆.问题完成后,教师进一步追问:根据已知条件,你能否迅速识别点 C 的轨迹是圆?能否用前面拓展的知识加以解释?经点拨后,学生发现 $AC=\sqrt{2}BC \Leftrightarrow AC^2-2BC^2=0$,是表征(3)拓展的特例,让学生感受到数学内部的关联之美.教师适时说明例题中的圆称为阿波罗尼斯圆,并适当补充介绍数学史等数学文化内容,再一次激发学生的学习兴趣.

教师指出:“在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=2$,________,求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值”,其中的空格可以更换为任意一个使得点 C 的轨迹是圆的条件,比如前面的 $\angle C=60°$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$,$AC^2+BC^2=6$,或者 $2AC^2-BC^2=4$ 等,使之成为一道完整的题.这些题都可借助隐藏的圆来完成,只要对所给式子进行模式识别,实现题中无圆,眼中有圆.

教师进一步指出,变式的方向,除了更换条件,还可以更换结论,比如“在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=2$,$AC=\sqrt{2}BC$,求________”.研究什么呢?圆的问题,除了研究自身的一些性质,比如例题,还可以研究点和圆、直线和圆、圆和圆的问题.

在教师的启发下,师生共同提了两个问题:求 AC 的取值范围以及求 $\tan A$ 的最大值.他们分别对应着点和圆、直线和圆的位置关系.那么,能否基于例题设计一道用圆和圆的位置关系解决的题目呢?凭空再造一个圆对学生而言要求过高,教师直接给出了事先预设的变式以帮助学生打开思路:

在平面直角坐标系 xOy 中,设点 $A(1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,a)$,$D(0,a+2)$,若存在点 P,使得 $PA=\sqrt{2}PB$,$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=1$,求实数 a 的取值范围.

当明晰了问题的由来,揭示了问题的本质,答案已经变得不再重要,学生沉浸在巨大的创造的喜悦里,不可自拔,一道道不成熟但绝对是学生原创的试题源源不断地降临世间.

为了进一步点燃学生思维的火把,教师提醒学生逆向探究是一种重要的思维习惯.作为示范,教师以例题为例作了简要说明.将例题条件和结论进行编号:①$AB=2$,②$AC=\sqrt{2}BC$,③$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.对三个编号重新组合可以获得新题,比如:若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$,$AB=2$,求 $\frac{AC}{BC}$ 的最大值.学生兴趣盎然,全情投入,新题佳作,翩翩而来.

设计意图 从例题到变式,教师解读问题的由来,上下串联,涵盖了隐圆问题的主要题型.通过教师的引领,让学生认识到数学问题并非无源之水、无本之木.揭示了隐圆问题的本质,就可帮学生化隐为显,使之变得透明,破除神秘感.另外有意识地带领学生对问题进行正向、逆向、一般化以及特殊化等各

项探究,一来有助于理解问题的本质,二来可让学生明白对待某类共性问题,不能再孤立地看待,而需要整体联系和处理,三来能培养学生的问题意识,掌握问题探究的一般思维和方法,提高学科素养,助力后续发展.

1.4　领悟题魂　感悟升华

回到课始(1)～(5)这五个表征,教师以“(3)$AC^2+BC^2=4$”为例,问:如果将加号改为减号,对应的轨迹还是圆吗?将(3)改为$AC+BC=6$呢?改为$AC-BC=4$呢?

问题不难,但学生都若有所悟,陷入沉思.教师追问:从提供的等式你能感知点C会在某个曲线上运动吗?

教师解释:以上式子中,有三个字母,只有C是动点.一个动点满足一个有规律的式子,说明这个点一定不会天马行空地乱动,它必定在某种特殊的曲线上运动.在什么曲线上呢?解析法就是工具!可以通过建系寻找它对应的方程判别它对应的曲线,这就是解析几何的核心思想.我们不强求看到代数等式能立刻说出它对应的曲线,但我们应该具备感知它在某种特殊的轨迹上运动的意识.

设计意图　本节课不在于让学生知道圆对应着哪几种代数形式,更重要的是要领悟代数等式和几何图形之间的对应,形成轨迹意识.隐圆只是一个起点,既是探究的起点,也是认识的起点,所隐的不局限于圆,也可以是线段、椭圆、…….具体到本节课,当化隐为显,所谓的隐圆也就揭开了它神秘的面纱,飞入寻常百姓家,不过就是普通的圆的问题.学生领悟到这一点,认识就会蜕变,能力自然提升,思维也就随之升华.

2　教学立意的进一步阐释

2.1　基于多元表征,驱动思维发展

隐圆问题是近几年高考、模考中流行的的问题.按题型分类可分为:点与隐圆、线与隐圆、圆与隐圆等.依此分类方式选择相应题目进行授课,停留在简单的套题型阶段,不利于理解问题的本质,也不利于体会题目之间的内在关联.

为打破这一设计窠臼,我们的构思旨在揭示隐圆的本质,基于学生已有的认识,把直径所对圆周角是直角这一圆的性质,进行不同的代数表征.通过合情推理、适度拓展,从特殊推广至一般,获得隐圆的各种代数形式.这种归纳的方法是对隐形圆的形成进行系统分类,一方面让学生体会代数式与轨迹之间的对应关系,另一方面可以让学生经历科学研究的一般方法,亦是核心素养所追求.系统分类形成隐圆的各种形式,不仅方便从代数式结构上进行模式识别,而且能建立几何图形的直观认知,从而能快速实现解题的目标.

2.2　基于探究活动,致力素养养成

杜威认为,思维的自然规律不是形式逻辑,而是实验逻辑的反省的思维.它是对问题反复地、持续地进行探究的过程.本节课探究的生长点是直角的不同表征,在每种表征一般化的探究过程中,始终以“直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算”为策略方法,让学生亲身经历并一以贯之,在探索中自觉领悟数学本质,掌握数学思想方法.

本节课的探究环节是典型的数学抽象过程,在此过程中又涵盖了逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析的过程.经常提供类似的探究平台,学生的探究习惯、核心素养无需刻意追求就会自然养成.

探究始于问题,问题在哪里?本节课做了很好的示范:联想、推广、逆向思考、寻求关联等,都是发现问题的好方良策.提高学生的问题意识,对学生的后续发展而言要比会做几种类型的题目更加重要.有了问题,也就有了探究的对象,在探究中帮助学生逐渐养成良好的探究意识,掌握较好的探究方法,提升数学核心素养.

2.3　基于变式教学,推动例题教学

如何进行例题教学,是一个常谈常新的话题.选择什么题目作为例题,教学中如何处理它是备课时必须认真考虑的内容.为了打消学生对隐圆问题的畏惧感,我们采用了变式教学来揭示这类问题的本质.本质往往深藏、内隐在许多表象之中,实施变式教学,可以通过变更数学对象(问题)的呈现形式,使其非本质特征逐渐淡化,从而逐渐凸显其本质特征.

本节课的例题选择的是江苏卷 2008 年第 13 题,一方面在于它的经典性,另一方面更在于它的生长性.变式从三个方向展开,一是隐圆形式的变化,二是递进形成它与点、线、圆之间关系的问题,三是逆向思维,结构重组得到新题.在变式教学过程中,要关心学生的主动参与,情感投入.事实上,实际上课时学生们都跃跃欲试,部分同学编制了有意义的问题,这些充分说明学生的创新潜能是无限的,也说明学生创新潜能的开发需要教师的

(下转 63 页)

基于问题导向的高中数学核心素养培养策略

于莺彬
(山东省青岛第六十六中学，266032)

在新课程标准的“教学建议”中明确指出:“高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的教学情境,启发学生思考,引导学生把握数学内容的本质.提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式,激发学习数学的兴趣,养成良好的学习习惯,促进学生实践能力和创新意识的发展.”本文通过几个基于问题导向的教学设计案例，就如何落实核心素养进行探究.

1. 基于问题导向的概念建构

概念是反映对象的本质属性的思维形式,它是人们把所感知的事物共同本质特点抽象出来的,并概括到同类事物中去而形成的“思维产物”,数学概念就是数学对象的本质属性及其特征在人的思想中的反映,它是整个数学知识的基础,所以说,数学概念的教学是数学基础和技能形成的核心,更是核心素养培育的基石.教师要充分利用好课堂这个主阵地,与学生一起重温数学知识产生的背景、形成的过程和方法这段“历程”,让学生亲历知识的动态生成，动手发现鲜活的数学,才能让学生学会数学地智慧地思考.

在数学概念的教学中,概念的学习过程中蕴含了对学生发现、探究、抽象等素养的培养.

【案例 1】

《集合》概念的教学中,通过学生对几组具体的、且带有某种属性的对象全体进行初步的认知.例如,观察下列四个问题:① 青岛一中 2018 级全体学生;② 大于 -2 的整数;③ 所有的直角三角形;④ 中国高个子的男人.是否可以清晰地判断出每个例子中的对象是什么?并说明理由.通过观察,抽象出“一组具有某种明确属性对象的全体可以构成一个集合”这样一个浅显的集合定义.然后再通过给定的具体实例,例如,判断下列哪些是集合?为什么?① 青岛市所有中学生;② 有一个锐角是 30° 的三角形;③ 所有知识分子;④ 所有游戏高手.让学生自主探究,对集合的概念重新认识,这样一个由具体到抽象、概括的过程,就形成了一个完整的认知链,在概念的学习过程中,培养了学生的数学素养.

【案例 2】

《用二分法求方程的近似解》的教学,可以设计如下的游戏活动.

游戏 1:猜价格.在班上请某学生猜某一款手机的价格,猜之前由老师告知此款手机的价格在区间 $600\sim1800$ 内,然后此生每猜一次,老师就会告诉此生价格是高了还是低了,直到猜中为止.

游戏 2:猜分数.某次期末考试结束后,学生甲的总成绩有了明显的进步,老师让学生甲猜猜自己到底提高了多少分?老师告知分数提高在 50 和 300 分之间,采取活动 1 的方法,直到猜中为止.

老师提出如下的问题让学生思考:① 用了什么方法猜数?② 游戏中包含的数学思想是什么?③ 根据游戏中的方法计算出无理数 $\sqrt{14}$ 的一个近似值(精确到 0.1).④ 怎样用这种方法求方程 $x^2-2x-1=0$(精确到 0.1)的近似解?

通过创设这种趣味性的游戏活动,老师提出问题,让学生积极参与其中,经历探究方法和知识的过程,解决问题、自主建构数学知识,使学习过程变得轻松、活泼,从而提高了学习的效率和效果.

【案例 3】

《三角函数的周期性》的教学,可以设计如下层层递进的问题串.

情景:离离原上草,一岁一枯荣,野火烧不尽,春风吹又生.

问题 1:这首诗揭示了自然界的什么现象?

问题 2:生活中有其他类似的事例吗?请举例说明.(时针的圆周运动、日月星辰的往复运动、四季的变换、植物的生长周期、班级的课程表等)

问题 3:若一周内,我们班的数学课节次均不相同,今天是 9 月 1 日,数学课时上午第一、二节,你能知道还有哪些天的数学课也是上午第一、二节?

问题 4:我们班的课程表只要一半可以吗?

问题5:你需要两张课表吗?

问题6:你能用自己的语言简单描述一下这种规律吗?

本案例让学生深刻地体会到周期现象的普遍存在,看似简单的问题,实质是层层深入,逐步让学生从直观上感受周期与最小正周期的概念.

像这样的学习素材有效地联系了学生的生活世界和数学世界,由特殊到一般、直观到抽象的过程,让学生经历和体验了数学知识产生、形成和应用的全过程,正如波利亚指出的要让学生看到数学建造过程中的"脚手架",而不是现成品,对发展学生的直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算等核心素养起到积极的促进作用.

2. 问题导向有益于数学概念(定理)本质的理解

在概念课的教学中,有一个重要的环节就是对概念的正确理解,应该避免的一个做法是"过分重视定义的叙述,对定义字字推敲,处处斟酌,不厌其烦地举例、反例,并且要求学生熟读定义、熟记定义,这种教学往往费时费力,且效果欠佳,其主要缺点是:容易将学生导向只死记硬背定义和结论,而不求深入地理解概念;由于学生思维中缺少说明概念关键特征的具体形象,一旦遇到不能用已有模式解决的问题,就会感到束手无策,因此不利于数学思维能力的提高."

【案例4】

《直线的倾斜角和直线的斜率》的教学,可以设计如下的问题.

问题1:过平面内一点可画无数条直线,它们有什么区别?

学生很容易作答:形成不同的"角",此时老师追问:既然形成不同的"角",那么如何用"角"来区分这些直线的不同呢?这里老师可以提醒的是,尽量找一个共同的"参照物",因为角的形成方式有两种情况:一是一顶点两射线,二是一射线绕一点旋转而成,所以既然要用"角"来区分这些不同的直线,需要再找一条射线,为了方便起见,就确定直角坐标系的x轴,直线与x轴的交点为顶点,与x轴正方向所成的角,这个角的名字叫倾斜角.

问题2:任何一条直线都有倾斜角吗?

学生答毕,接着追问:如果直线与x轴平行或重合,此时直线的倾斜角多大?(这里需要注意的是为什么是0°而不是180°?)

问题3:直线的倾斜角的取值范围是什么?

教师:解析几何问题解决的方法是代数法,所以在这里也需要用"数"来区分不同的直线,所以引进"斜率"来刻画直线的倾斜程度.

问题4:任何一条直线都有斜率吗?(这里需要提示的是当倾斜角为90°时,斜率不存在;除此之外,均有斜率.)

问题5:斜率有正负之分吗?为什么?直线的斜率的取值范围是什么?

本案例通过问题1的创设,引发学生的思索,从而引出"直线的倾斜角",结合解析几何的特点,引出直线倾斜程度的另一个度量——"斜率";然后从概念的内涵和外延出发,通过一系列问题的提出,多角度、多层次地剖析与解决,引导学生经历从具体实例抽象出数学概念的过程,使学生在概念的产生与形成的过程中,对所学的概念已经有了深刻的认知、理解和掌握;这样的设计,利用学生的知识和经验,通过师生之间的智慧交流,让学生的思维动起来,最终让学生掌握了概念的真谛;这样的设计,也真正把学生当成了学习的主人,使学生在学习的过程中促进了自身数学素养的提高.

【案例5】

《函数的概念》的教学,创设如下的情景和问题.

情景1:我们生活在这个世界上,每时每刻都在感受变化,请大家看下面的实例:

(1)太阳从东方冉冉升起,随着时间的变化,太阳的高度在变化.

(2)南京市一年四季人们穿着的变化,气温随着时间在悄悄变化.

(3)我国国民经济值(GDP)逐年上升(统计折线图).

问题1:这些变化着的现象,说明什么?

情景2:现实生活中,我们遇到下列问题:

(1)估计人口数量变化趋势是我们制定一系列相关政策的依据,从人口统计年鉴中可以查得我国从1949年至1999年人口数据资料如下表,你能根据这个表说出我国人口的变化情况吗?下表是1949年至1999年人口数据表:

年份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994	1999
人口数/百万	542	603	672	705	807	909	975	1035	1107	1177	1246

(2) 一物体从静止开始下落,下落的距离 y(m) 与下落时间 x(s) 之间近似地满足关系式 $y = 4.9x^2$,若一物体下落 2s,你能求出下落的距离吗?

问题 1:在上面的例子中,是否确定了函数关系?为什么?

问题 2:如何用集合的观点来理解函数的概念?

问题 3:如何用集合的语言来阐述上面 2 个例子中的共同特点?

问题 4:如何用集合的观点来表述函数的概念?

这里是从生活中的实例出发,使学生感受生活中的数学,用数学的眼光来观察、分析生活中的事件及变化,抽象出函数的集合定义,构建函数的一般概念,强调对应的观点,突出函数是刻画现实世界中量与量之间关系的模型.

【案例 6】

《瞬时速度》的教学,可以设计如下的问题串.

情景:在高台跳水运动中,已知运动员相对于水面的高度 h(m) 与起跳后的时间 t(s) 存在关系 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$.

问题 1:计算 $t \in [0, \frac{65}{49}]$ 时的平均速度 $\bar{v}$;

问题 2:你认为通过平均速度 $\bar{v}$ 来描述其运动状态有什么问题?

问题 3:如何计算 $t = 2$ 附近某段时间间隔内 ($[2, 2-\Delta t]$ 或 $[2, 2+\Delta t]$) 的平均速度 $\bar{v}$?

问题 4:当 Δt 无限趋近于 0 时,平均速度 $\bar{v}$ 有怎样的变化趋势?

问题 5:什么叫做瞬时速度?如何计算在 $t = t_0$ 时的瞬时速度?

问题 6:函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率怎样表示?

这里根据学生的生活经验,通过实际背景创设丰富的问题情景,引导学生用心体会“无限趋近”的过程中所蕴含的“有限与无限”、“量变到质变”、“近似与精确”的思想,从中抽象出函数在某点处的瞬时变化率,即导数;在这个过程中,让学生学会了用变化和发展的观点来感受和领悟数学的思想,认识导数概念的实质,发展了数学素养.

【案例 7】

《直线与平面平行的性质定理》的教学,可以设计如下的探究性问题串.

问题 1:如果直线 l 与平面 α 平行,那么直线 l 与平面 α 内的直线具有怎样的位置关系?(学生经过思考,很容易得到:直线 l 与平面 α 内的直线平行或异面.)

问题 2:在平面 α 内,哪些直线与直线 l 平行呢?(学生经过讨论得出:平面 α 内与直线 l 平行的直线一定与直线 l 共面.)

问题 3:怎样在平面 α 内找到与 l 共面的直线呢?(学生尝试后发现:过直线 l 作一个平面与平面 α 相交,那么交线与直线 l 共面.)

问题 4:如何证明交线与直线 l 平行?(通过学生的一系列思、做,发现、证明了直线与平面平行的性质定理.)

问题 5:用自然语言说出直线与平面平行的性质定理.(定理略)

问题 6:分别用图形和数学符号表示上述性质.(略)

这个过程在问题的“导向”下,充分体现了学生学习的主体性和自主性,学生通过探索、思考、合作等,经历了自主探究、自行发现的过程,加深了对定理的理解;这个过程既涉及认知层面,又渗透了主体的情感、态度、意志等心理因素,让学生的身心素质得到了提高.

3. 基于问题导向的变式练习

例 1　在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边为 a, b, c,若 $a = 1$, $2\cos C + c = 2b$.

(Ⅰ) 求 A;(Ⅱ) 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

解析　(Ⅰ) **思路 1(角化边)**　由 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $a = 1$, $2\cos C + c = 2b$,得:$b^2 + c^2 - 1 = bc$,所以 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-1}{2bc} = \frac{1}{2}$,故 $A = \frac{\pi}{3}$.

思路 2(边化角)　注意到 $a = 1$, $2\cos C + c = 2b$,则有 $2a\cos C + c = 2b$,由正弦定理得:

$2\sin A\cos C + \sin C = 2\sin B$.

又因为 $A + B + C = \pi$,所以

$2\sin A\cos C + \sin C = 2\sin(A + C)$,

故可得 $\sin C = 2\sin C\cos A$.

又 $\sin C \neq 0$,所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,故 $A = \frac{\pi}{3}$.

(Ⅱ) 问题转化为求 $b + c$ 的取值范围.

思路 1:因为 $a = 1$, $A = \frac{\pi}{3}$,由正弦定理得:$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B$, $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin C$. 所以

$$b+c=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}[\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)]$$

$$=2\sin(B+\frac{\pi}{3}),$$

因为 $B\in(0,\frac{2\pi}{3})$,$B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$,因此 $b+c\in(1,2]$,故 $a+b+c\in(2,3]$.

因此,$\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(2,3]$.

思路 2　由 $b^2+c^2-1=bc$ 得 $(b+c)^2=3bc+1\leqslant\frac{3}{4}(b+c)^2+1$,解得 $b+c\leqslant 2$,以上两个不等式均为当且仅当 $b=c$ 时等号成立. 又 $b+c>a=1$,因此 $b+c\in(1,2]$,故 $a+b+c\in(2,3]$.

因此,$\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(2,3]$.

通过解题思路的选择(一题多解)克服学生的思维定势,让学生可以从多角度、多途径寻求解决问题的方法,总结解题的规律,优化解题的方法,提高分析问题、解决问题的能力,使思维的发散性和创造性增强,进而提升学生的数学核心素养.

作为解题课或复习课,学生可以在解决某一个具体的问题后,对其进行反思,也就是我们常说的题后反思,反思问题的设计、问题的解决等,这里要说的是,是否能在对问题的深刻解决中把问题延伸或拓展呢?比如,把问题变式或拓展,以例 1 为例变式.

问题的变式是通过对某几个知识点设置成不同的问题情境,通过对知识点挖掘问题所隐含的不同解决思路、方法或策略,从不同的角度理解、深化认知,拓展思维,在学生的探索、讨论、合作学习等途径中,拓宽视野,激发探究意识,获取成功的喜悦,使学生的学习走向深度,提升数学核心素养. 例 1 中的条件 $a=1$,$2\cos C+c=2b$ 就是为了求得 $A=\frac{\pi}{3}$,像这样的设置条件很多,由于三角公式的丰富,在这里可以把条件改变,得到如下的变式.

变式 1　在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边为 a,b,c,若 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 若 $a=1$,求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

变式 2　在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边为 a,b,c,若 $4\sin^2\frac{B+C}{2}-\cos 2A=\frac{7}{2}$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 若 $a=1$,求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

变式 3　在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边为 a,b,c,向量 $\mathbf{p}=(\cos\frac{A}{2},\sin\frac{A}{2})$,$\mathbf{q}=(\cos\frac{A}{2},-\sin\frac{A}{2})$,且 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 若 $a=1$,求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

变式 4　在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边为 a,b,c,若 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$.

(Ⅰ) 求 A;

(Ⅱ) 若 $a=1$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,求 b,c 的值.

通过对解题思路的深刻剖析,得到一"小类"问题的解决规律,让学生体会当问题的条件发生了某些"非关键性"的变化,对问题的解决思路没有影响,但是条件间的影响还是很大的,由此看来每个问题中的条件之间的关联性还是非常紧密的. 所以,在解决数学问题的过程中,要仔细分析各个条件以及条件间的关联度.

追问 1:在例 1 中,如果把条件"$a=1$"改为"$a=2$",让所求的 A 还是 $\frac{\pi}{3}$,条件"$2a\cos C+c=2b$"将如何进行改编?倒推,由 $A=\frac{\pi}{3}$ 得:$b^2+c^2-4=bc$,由前面的第(Ⅰ)问的思路 2 猜想,是否将原条件"$2a\cos C+c=2b$"变为"$4\cos C+c=2b$"即可?经验证显然可行,只是第(Ⅱ)问的答案变为了 $(4,6]$.

追问 2:在例 1 中,保持两个已知条件得个数和所求的 $A=\frac{\pi}{3}$ 不变,如果把条件"$2a\cos C+c=2b$"中的某个数字系数改变,是否要将条件"$a=1$"进行怎样的改编?如将"$2a\cos C+c=2b$"变为"$\cos C+c=b$",经过推算"$a=1$"不变即可. 参照如此的改法将"$2a\cos C+c=2b$"变为"$m\cos C+c=mb$(m 是任意的正整数)",经过推算条件"$a=1$"改为"$a=m$"即可.

像这种简单的"命题"训练,可以让学生真正理解知识间的有机联系,激发以往的知识和思维经验,在掌握知识的同时领悟到知识背后的方法、思想与价值,进而提高学生的逻辑推理能力、创造能力和积极探索的精神. 其实,这样的过程可以看作是一个"研题"的过程,从一题多解、一题多变到自主"命题".

(下转 10 页)

基于数学核心素养的课堂教学研究
—— 以一道统计案例的教学为例

王洪军
(内蒙古自治区呼和浩特市内蒙古师范大学附属中学,010020)

一、引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》中指出:“学科核心素养是育人价值的集中体现,是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力.数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的.”基于此,将高中数学核心素养确定为数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析这六个方面,同时,从以前的“双基”(即数学基础知识与数学基本技能)拓展为现如今的“四基”(即数学基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验),这为发展学生的数学核心素养奠定了基础,在教学中以问题为载体,进一步提高学生从数学的角度发现和提出问题的能力,分析和解决问题的能力(即“四能”),其实问题解决的过程就是培养学生能力、发展数学核心素养的过程. 从这些转变中我们能够感觉到数学教育的终极目标是,当一名学生学习数学之后,即便他将来从事的工作与数学无关,也应当会用数学的眼光观察世界,会用数学的思维思考世界,会用数学的语言表达世界. 因此,对一线教师的数学教学就提出了更高的要求:要把握数学内容的本质;创设合适的教学情境、提出合理的问题;启发学生独立思考,鼓励学生与他人交流;让学生掌握知识技能的同时,感悟数学的本质;让学生积累数学思维经验,形成和发展数学核心素养.

本文以一个统计案例为载体,尝试说明如何将数学核心素养贯穿于教学中,与读者交流.

二、案例设计及分析说明

案例 1 在池塘中随机地捕捞 500 条鱼,做上记号后再放入池中,待充分混合后,再捕捞 1000 条,结果发现其中有 72 条鱼带有记号,试问池塘中可能有多少条鱼?

这是学生在初中就见过的一个案例,因此,对高中学生而言轻而易举就会得到答案,如果对问题轻描淡写地一带而过,就丧失了提升数学素养的时机,对于这个熟悉的问题,我们不妨从更一般的角度阐述解答的合理性,也就是将数学抽象、逻辑推理等数学核心素养贯穿其中,基于此,这里先将问题抽象为一般情况:

设池中有 N 条鱼(N 是未知量),其中 r 条带有记号,随机地捕捞到 s 条,发现 x 条带有记号,用上述信息来估计 N.

要解决上述问题,可以从下面两个不同的角度进行阐述:

一是替换原理,既然样本可以较好地估计总体,那么可以用样本中的比例 $\frac{x}{s}$ 代替总体中的 $\frac{r}{N}$,这种想法学生易于接受,进而可得 N 的估计量 $\hat{N}=[\frac{rs}{x}]$,其中 $[\frac{rs}{x}]$ 表示不超过 $\frac{rs}{x}$ 的最大整数.

二是基于统计学中点估计的最大似然估计(maximum likelihood estimation),在参数统计推断问题中,它是建立在这样一种直观想法的基础之上:假定一个随机试验有若干个可能的结果 $\omega_1,\omega_2,\cdots$,如果在一次试验中出现结果 ω_1,那么一般认为试验条件对“结果 ω_1 出现”最有利,即这个试验中“出现 ω_1”的概率(站在试验前的立场上考察)最大.这种想法很自然也很合理,但是在数学上需要的预备知识较多.

用随机变量 X 表示捕捞到的 s 条鱼中带有记号的鱼的条数,则 X 服从超几何分布:

$$P(X=x)=\frac{C_r^x C_{N-r}^{s-x}}{C_N^s},$$

其中 x 为整数,且 $\max\{0,s-(N-r)\}\leqslant x\leqslant\min\{r,s\}$.

它是关于 N 的函数,令 $L(x;N)=\frac{C_r^x C_{N-r}^{s-x}}{C_N^s}$,我

们可以认为 N 的真值应该使得上述概率达到最大,则取 $L(x;N)$ 达到最大的 $\hat{N}$ 作为 N 的估计量. 但是借助导数较为复杂,现用如下方法:

$$A(x;N)=\frac{L(x;N)}{L(x;N-1)}=\frac{(N-r)(N-s)}{N(N-r-s+x)}$$
$$=\frac{N^2-(r+s)N+rs}{N^2-(r+s)N+Nx}.$$

当且仅当 $N<\frac{rs}{x}$ 时,$L(x;N)>L(x;N-1)$,当且仅当 $N>\frac{rs}{x}$ 时,$L(x;N)<L(x;N-1)$,可知 $L(x;N)$ 在 $\frac{rs}{x}$ 附近取得最大值,注意到 N 只能取正整数,因此,N 的估计量 $\hat{N}=[\frac{rs}{x}]$.

上述两种思路所得到的 N 的估计量是一致的,将案例中的数值代入可得 $\hat{N}=[\frac{500\times1000}{72}]=6944$,即池塘中鱼的总数约为 6944 条.

许多数学家、数学教育家(如荷兰的弗赖登塔尔(Hans Freudenthal))都倡导数学教学要重视知识的发生过程,这样,学生不仅能够了解知识是怎么来的,为什么有,而且通过参与知识的发生过程能够实现某种程度的再创造. 因此,教学中应重视学生基本活动经验的培养,数学活动经验不仅仅是解题经验,更重要的是在多样化的数学活动中去思考、去探索、去发现结论的经验. 学生在积累数学活动经验的过程中所获得的丰富而有价值的经验往往是孕育素养、形成智慧、进行创新的重要基础.

以案例 1 为基础,我们可以设计一个统计活动,让学生经历数学建模、数据收集与处理等一系列活动,更好地挖掘典型问题的育人功能.

案例 2 让学生以小组为单位用围棋子进行模拟试验(类比估计池塘中鱼的数目),每组学生领到一袋围棋子(共 140 颗,其中黑棋子 25 颗,白棋子 115 颗),学生只知道有 25 颗黑棋子,每次从袋子中随机摸出 20 颗棋子,记录黑棋子的数量,将棋子放回并摇匀,再摸第二次、第三次、……,将这种操作进行 10 次,要求他们根据所得到的数据估计袋子中围棋子的个数.

假设一组学生进行上述试验记录的结果(即黑棋子的数量)为 2,2,5,4,4,2,1,4,2,3,这时如何根据这 10 组数据估计袋子中围棋子的个数?

方案一 先将上述 10 组数据取平均值可得 $\frac{1}{10}(2+2+5+4+4+2+1+4+2+3)=2.9$,再利用公式可得 $\hat{N}=[\frac{25\times20}{2.9}]=172$,则袋子中围棋子的个数约为 172.

方案二 先按公式计算出每次的估计值,即估算出袋子中围棋子的个数分别约为 250,250,100,125,125,250,500,125,250,167,再将这 10 个估计值取平均值,可得

$$\frac{1}{10}(250+250+100+125+125+250+500+125+250+167)\approx214.$$

上述两种方案所得结果差别较大,相对来说,利用方案一估计的结果与真实值较为接近,由此可以引导学生思考如下问题:

(1) 按上述试验估计围棋子的个数时,利用方案一所得结果是否每次都比利用方案二所得结果更接近真实值?

(2) 在篇首的案例中,只做一次试验通过所得结果估计池塘中鱼的数目,这种做法是否可靠?

(3) 在实际问题中,要估计池塘中鱼的个数,方案一和方案二哪个可行?

对于第(1)个问题,抽象为一般情况:设袋子中有 N 个围棋子(N 是未知量),其中 r 个是黑棋子,将如下试验重复 n 次:每次随机地从袋子中取出 s 个棋子,记录其中黑棋子的个数 x_i,其中 $i=1,2,\cdots,n$,之后放回摇匀,再继续抽取. 用上述信息来估计 N.

利用方案一的处理方法可得

$$\hat{N}_1=[\frac{rs}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}];$$

利用方案二的处理方法可得

$$\hat{N}_2=\frac{1}{n}([\frac{rs}{x_1}]+[\frac{rs}{x_2}]+\cdots+[\frac{rs}{x_n}]),$$

由不等式知识易知 $\hat{N}_1\leqslant\hat{N}_2$,可以得知利用方案一所得结果比利用方案二所得结果更接近真实值.

对于第(2)个问题,从所作的估计围棋子的试验中能够看到,每次的估计值差别较大(最大的是 500,最小的是 100),因此,只做一次试验通过所得结果估计池塘中鱼的数目,尽管可行,但是相对来说,这种做法不太可靠.

对于第(3)个问题,在实际问题中,方案一不可行,因为每次捕鱼的条数不一定都是一样的,但是方

案二仍然可行,此时 $\hat{N}_2=\frac{1}{n}([\frac{rs_1}{x_1}]+[\frac{rs_2}{x_2}]+\cdots+[\frac{rs_n}{x_n}])$,其中 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为每次捕鱼的条数,相对来说,利用方案二所得估计量比只做一次试验所得估计量可靠.

三、如何将学科核心素养贯穿于教学中

如何将学科核心素养贯穿于日常教学之中,这是很多一线教师特别困惑的地方,结合上述案例谈谈对这一问题的看法,供读者参考.

首先,数学学科核心素养是在数学学习的过程中逐步形成的,数学学科核心素养的达成与具体内容的学习紧密相关,因此,在制定教学目标时要思考教学内容与哪些数学核心素养的哪个方面有密切联系,对学生核心素养的发展有哪些贡献.

其次,在设计特定的教学任务时,引导学生提出和发现问题,分析和解决问题,只有在解决问题的过程中才能使学生的数学核心素养有效形成.

第三,要特别重视教学过程中给学生创设合适的情境,以便于学生参与其中并积累基本活动经验,数学教学情境是多样化的,包括现实的、数学的、科学的. 例如,概率统计部分有着丰富的现实背景,可以将实际问题作为重要的现实情境贯穿教学的始终;向量部分具有丰富的物理背景,教学过程中可以将物理情境作为重要的科学情境等等,当然,设计适合学生实际的情境对教师也是具有挑战性的,需要我们了解数学与生活、数学与其他学科的联系,要求我们不断地学习、研究、实践,以提升自身的数学素养.

第四,数学教学活动重心应从关注教转到关注学,我们应该把教学活动的重心放在促进学生学会学习上,学会学习不仅是数学学科核心素养形成的有效途径,也是数学学科核心素养的综合体现,更是学生在离开学校进入社会后所必备的关键能力,进入 21 世纪,学会学习已经成为世界各国对高中学生要求的基本能力,因此,我们可以在教学中探索有利于促进学生学习的多样化的教学手段,更好地调动和激发学生的学习兴趣,使其从内心真正地感受到数学的重要作用,感悟数学的魅力.

参考文献:

[1] 史宁中,王尚志. 普通高中数学课程标准(2017 年版)解读[M]. 北京:高等教育出版社,2018.
[2] 史宁中,陶剑. 中学概率与微积分研究[M]. 北京:高等教育出版社,2010.
[3] 茆诗松,程依明,濮晓龙. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

(收稿日期:2018－12－12)

(上接第 7 页)

从高中生的特点看,学生具备较强的思维能力和解决问题的能力,适合问题组探究学习方式;将问题设计成组,更符合高中学段的学情. 通过对问题组的分析、探究和解决过程,能够实现学生的有序思考、连续思考、有深度思考、批判性思考,促进学生解决问题能力的提高和思维的发展;学生在解决问题的过程中能够不断获得学习上的成就感,从而调动学生学习的积极性;学生之间对疑难问题的探讨,能够引发学生多角度、多层次的思维碰撞,促进他们对知识的深层次理解,培养学生的思维能力,提高学习效率. 课堂教学既要有量的保证,更要有质的保证,效率一定要高. 我们必须立足于课堂教学实效,否则本末倒置,贻害学生. 教师在研究问题组设计的过程中,要系统地把握知识的内在规律,提高备课的效益;从学生的问题解决过程去研究问题组的设计,可以有效避免教师在课堂上“随意问”、“满堂问”等低效教学行为,提高课堂教学质量,促进高中学生的核心素养培养.

参考文献:

[1] 庄志刚. 对高中数学核心素养与教学设计的思考[J]. 数学通讯(下半月),2017(4).
[2] 庄志刚　于莺彬. 基于高中数学核心素养的教学设计研究与实践[J]. 数学通讯(下半月),2017(12).
[3] 赵春雷. 以问题探究为导向的高中数学教学研究[J]. 中国高新区,2018(6).
[4] 黄金晶. 以问题探究为导向的高中数学教学研究[J]. 读与写,2017(7).
[5] 刘兼　曹一鸣主编. 数学学科知识能力与教学能力[M]. 北京:高等教育出版社,2011.

(收稿日期:2018－12－17)

PCK 视角下的概念知识解析与教学难点突破
—— 以“函数的零点”为例

钱 健
（江苏省南京市南京师范大学附属扬子中学，210048）

一、问题的提出

近年来，同课异构是各学校公开课、各区市教研活动的一种常用形式. 对于相同的教材、相同的课例，不同的教师往往会有不同的教学设计、不同的着力点、不同的课堂呈现及不同的教学效能. 其表象原因，一方面在于不同的教师对教材及课例的理解的差异从而产生不同的教学设计，另一方面在于不同的教师针对不同的授课对象及课堂上生成性问题随机采用的教学策略不同；其深层次的根本原因在于教师学科教学知识（简称为 PCK）的差异.

那么，教师的学科教学知识（PCK）又是如何影响教师的课前教学设计的呢？本文将以苏教版必修一 3.4.1“函数的零点”概念教学为例进行 PCK 视角下的概念知识解析，并对其教学难点突破进行策略设计，以期实现学生科学知识、学习方法与科学素养等数学学科核心素养培养的最优化.

二、PCK 的内涵简介

PCK 是学科教学知识（Pedagogical Content Knowledge）的简称，由美国斯坦福大学教授舒尔曼教授提出，他认为 PCK 是关于教师如何针对特定的学科主题及学生的不同兴趣与能力，将学科知识组织、调整与呈现以进行有效教学的知识，其实质是教师特有的转化智能，具体内涵包含学科的知识、课程的知识、学生的知识和教学的知识四部分，其关系如图 1 所示，只是 PCK 并不是这四种知识的简单叠加，而是四种知识的相互嵌套 、相互融合、彼此重组而形成的具备教师个人特质的个性化知识.

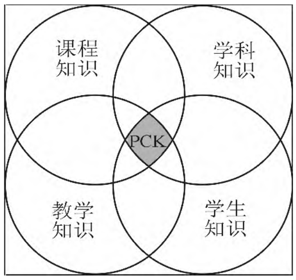

图 1

三、PCK 视角下的“函数的零点”知识解析和教学框架设计

教材与教师参考书是学科知识、课程知识的核心载体，因此，在教师日常教学流程中，一般而言教师首先需要详细分析教材、查阅多种教师参考书，从而在内容的教育价值、教学目标、科学研究方法与逻辑思维方法等方面进行详细分析，宏观把控该节内容在具体教学过程的深度与广度，并在此基础上结合学生的知识能力现状及可能碰到的认知困难、教师自身的个性化认知与教学经验等进行系统化课堂教学设计，从而确立合适的教学手段、选择恰当的教学策略以期达到教学效能的最大化. 在“函数的零点”这一节，我们从 PCK 的视角进行深度解析并进行教学框架宏观设计，具体内容如下.

（1）学科的知识

其核心在于教育价值与教学目标两方面.“函数的零点”的教育价值在于让学生经历一个从“形”到“数”的认识过程，通过观察、比较、抽象、概括，让学生构建一个直观想象到数学抽象的思维过程，培养学生的数学学科素养. 而教学目标又可细分为知识目标与方法目标，从知识目标方面来看，明确函数的零点的概念、函数的零点与方程的根的关系、零点存在性定理. 旨在让学生学习用函数的性质解决方程在某一区间上是否有解的问题，体会方程与函数的联系；从方法目标方面来看，通过本节“函数的零点”定义过程的学习，进一步体会化归与转化、数形结合、函数与方程在解决数学问题时的意义和价值.

基金项目：南京市教育科学“十三五”规划个人课题《用 PCK 理论提升高中数学青年教师教学能力的研究》（编号：L/2016/283）的阶段性成果.

(2) 课程的知识

其核心是了解前后知识联系与基本的研究方法."课标"中内容标准[1]对"函数与方程"(第1课时)一节教学目标的定位是:结合二次函数的图像,判断一元二次方程根的存在性及根的个数,从而了解函数的零点与方程根的联系.函数是中学数学的核心概念,核心的根本原因就在于函数与其他知识具有广泛的联系,而函数的零点就是其中的一个链结点."函数与方程"作为函数应用的开篇,是学生在系统地掌握了函数的概念及性质、基本初等函数后,更深入学习方程的根与函数关系的需要,并结合函数的图像和性质来判断方程的根的存在性及根的个数,从而掌握函数在某个区间上存在零点的判定方法.为下一节"二分法求方程的近似解"和后续学习"算法"提供了认知基础.其内隐的基本方法(特殊到一般,数形结合,函数与方程)、问题分析思路(多视角观察、图形特征转化为代数表示)有形到数的交错分析,都很好地契合了现实生活问题的解决过程.

(3) 学生的知识

其核心是教师要了解学生当前的认知现状与新知的差距,预判学生在新知学习过程中可能遭遇到的困难.学生初中已了解二次方程的根即为二次函数与 x 轴交点的横坐标,并且解决过"当函数值为 0 时求相应自变量的值"这类问题,同时学生系统地掌握了部分初等函数的概念及性质,都为本节课提供了一定的知识基础;同时,此时学生的数学能力发展正处于形象思维向抽象思维转换.函数零点存在性定理的探究过程中,如何将"图像特征"转化为"代数表示"以及对定理条件是充分不必要的理解,对学生来说是困难的.

(4) 教学的知识

其核心是教师根据学生知识与学科知识、课程知识之间的差距,选择合适的教学手段、恰当的教学策略,将学生难以理解的知识与方法转化为学生易于接受或理解的方式,从而降低思维梯度,实现教学效能的最大化.因此,教师需要在深入分析"函数的零点"的学科知识、课程知识与学生知识的基础上,在教育学、心理学及教学设计理论的指导下,综合利用自己的学科教学知识进行教学主线设计,以期实现教学难点的突破.

四、PCK 视角下的"函数的零点"教学难点突破策略设计

1. 将课堂教学重难点进行分解是突破难点的前提

教材对函数与方程的内容安排有一个逐步认识的过程,由浅入深、循序渐进,从学生认为较简单的一元二次方程与相应的二次函数入手,由具体到一般建立一元二次方程的根与相应的二次函数零点的联系,然后将其推广到一般方程与相应的函数的情形.显然"课标"中的目标定位是笼统的、不清晰的,要确保相当高的目标达成,必须要对此目标进行分解,转化为具体的、可直接指导课堂教学的、对达成情况可进行评价的子目标.结合课标的要求和教学活动设计,笔者把本节课的课标要求分解为如下 9 个小目标:

(1) 结合二次函数的图像,判断一元二次方程根的存在性及根的个数.

① 通过"画一画",重温二次函数图像的画法,回顾利用判别式的符号判断一元二次方程根的存在及根的求法;

② 通过"议一议",体会二次函数的图像和 x 轴交点的横坐标与一元二次方程根的关系;

③ 通过"猜一猜",感受从特殊到一般的数学研究思路,理解一般函数 $y=f(x)$ 的零点的概念.

(2) 了解函数的零点与方程根的联系.

① 通过概念辨析,体会零点的定义本质.

② 通过例 1(见后面)的探究,感受二次函数零点的判断方法及求解方法.

③ 通过变式 1(见后面)的探究,感受二次函数在给定区间上零点的存在判定方法,为研究零点存在定理提供从一般到特殊的研究思路.

④ 通过寻求零点存在定理探究活动,激发学生的探究兴趣和求知欲望;体验知识的生成过程,从中感受合作学习的快乐.

⑤ 通过例 2 及练习,应用零点存在定理解决问题,体验学习的成就感,增强学习数学的自信.

⑥ 通过变式 2 的探究,感受零点存在定理的不可逆性,理解"存在"的本质.

在"特殊到一般 + 数形结合"宏观思路的指引下进行"复习旧知识,学习新知识",在此过程逐步完成研究方法的迁移、研究对象的甄选、细微问题的解决、学生认知困难的降阶,从而从 PCK 的视角精准突破概念的教学难点.

2. 围绕教学难点进行学生活动设计是突破难点的保证

教学难点突破的落实关键看学生"学"的情况.基于弗赖登塔尔的教育理论[5]:数学教育方法的核

心是学生的再创造.教师不应该把数学当作一个已经完成了的形式理论来教,不应该将各种定义、规则、算法灌输给学生,而是应该创造合适的条件,让学生在学习数学的过程中用自己的体验和自己的思维方式重新创造数学知识.

基于此,教师通过设计恰当的学生活动,为学生搭建逻辑连贯的思维平台,把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态,在冰冷的美丽与火热的思考之间寻找平衡点.学生学习数学是一个经验、理解和反思并不断提高的过程,强调以学生为主体的学习活动对理解数学的重要性,强调激发学生主动学习的重要性.

【活动 1】

画一画　画下列函数的图像(草图):

(1) $f(x)=x^2-2x-3$;

(2) $f(x)=x^2-2x+1$;

(3) $f(x)=x^2-x+1$.

议一议　(1) 二次函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 的图像与一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的根有什么关系?

(2) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根有什么关系?

(此时教师给出二次函数零点的概念)

猜一猜　你认为一般函数 $y=f(x)$ 的零点如何定义?

设计意图　通过作图,让学生感受二次函数的零点的存在,为引出二次函数的零点作铺垫.进而为引导学生给出一般函数的零点的定义搭建逻辑连贯的思维平台.紧接着进行概念辨析,并强调零点与点的区别,进一步强化学生对零点概念的理解.

【活动 2】

例 1　求证:二次函数 $f(x)=2x^2+3x-7$ 有两个不同的零点.

变式 1　判断二次函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 在区间 $(2,3)$ 上是否存在零点?

设计意图　让学生感受没有区间限制的二次函数的零点的存在问题和有区间限制的二次函数的零点存在问题处理上的异同,体现逐步递进,为推出零点存在定理作铺垫.两个问题放在一起便于比较分析,符合学生的认知规律,利于实现知识的迁移.

【活动 3】

探究　满足什么条件时函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上存在零点呢?

设计意图　在活动 2 的基础,放手让学生充分讨论,并把自己的想法说出来、画出图来,展示给大家,直到得到大家的一致认可为止.通过同学们的亲身体验及不同观点间的碰撞,理解零点存在定理的本质,让学生充分感受零点存在定理的生成过程.

【活动 4】

例 2　求证:函数 $f(x)=x^3+x^2+1$ 在区间 $(-2,-1)$ 上存在零点.

练习:函数 $f(x)=3^x-x^2$ 在区间 $(-1,0)$ 上是否存在零点?

设计意图　巩固零点存在定理的应用,感受用零点存在定理解决复杂函数的零点问题.

【活动 5】

变式 2　(1) 判断函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在区间 $(1,3)$ 上是否存在零点.

(2) 判断函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在区间 $(-2,3)$ 上是否存在零点.

设计意图　通过相互关联的两道题,让学生在比较中体会零点存在定理的"存在"性;并能感受到零点存在定理的逆命题不一定成立.从多角度去理解定理,理解更深刻.

3. 对教学难点进行达成分析是突破难点的关键

目前大部分的数学课堂教学重难点达成和实施之间存在一定的距离,脱节现象时有存在,更重要的是缺少衡量达成的标准.有效教学的课堂教学需要难点明确,目标便于落实,易于达成.

对教学的难点达成情况进行分析,制订难点达成程度的评价标准.通过每一个教学环节,能看出学生到底有没有得到进步和发展,发展程度如何,能及时反应课堂教学的达成度和课堂教学中学生学习的效果,以及难点突破程度.通过教学目标分解,就需要结合教学环节及授课内容对难点达成情况进行分析,能及时对课堂进行评价.让细化的教学目标时时指导教学的每一个环节,也让教学实施始终围绕重难点的分解进行.否则分解就是空洞的,没有真正的价值.

以下选取本节课的两个学生活动片段说明难点达成分析.

片段 1:活动 3.

探究　满足什么条件时函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上存在零点呢?

组织形式:组织学生画出区间 (a,b) 内存在零点的不同图像,小组内充分讨论并大胆猜想论证零点一定存在的条件,小组汇报讨论结果并配以图像

(下转 20 页)

基于数学学科核心素养视角下的深度教学

董荣森 张建良
(江苏省无锡市江苏省怀仁中学,214196)(江苏省无锡市教育科学研究院,214100)

数学是思维的学科,数学课堂教学是思维的教学.在大力倡导发展学生数学核心素养的今天,思维应该是数学核心素养之“魂”、学生关键能力之“核”.无论过去、现在还是将来,数学课堂教学应该是基于“思维”的教,围绕“思维”的学,从而让学生获得良好的思维习惯和思维品质,进而提升学生的学习质量、生活质量乃至人生境界.但就目前高中数学课堂教学来说,还存在着一些不同程度的问题,如:在学习和认知的层次上,很多教师只拘泥于对所教内容浅层次的了解,满足于对知识的机械记忆,把学习等同于模仿,把思考弱化为寻找,把评价简化为对错;在知识建构过程中,部分教师没能很好地引导学生将脑海中旧知识附着点与新知识附着点进行很好对接,形成知识网络体系,导致部分学生出现所谓的“懂而不会”现象.学习的本义是指通过听讲、思考、理解、探究和总结去构建知识、获取能力的过程,缺失了思考与理解的学习就是浅层次学习,缺乏探究与总结的学习就是低水平的认知.发展学生的数学核心素养,培养学生的关键能力,显然靠浅层次的课堂教学是无法顺利达成的.

因此,实施深度课堂教学,不仅可以更好地引导学生进行深度学习,不断地提升数学课堂教学品质,丰富数学课堂教学的思维内涵,提高设计问题的思维含量,形成有效乃至高效的数学活动,而且能够在发展学生数学核心素养、提升学生关键能力的新征程中发挥真正作用.下面结合教学案例,就深度教学的实施谈几点认识,以飨读者.

一、透过表征揭示本质,实施深度理解,提升数学抽象素养

问题是数学的心脏,可以这么说:“没有问题就没有数学”.鲍波尔曾说过:“正是问题激发我们去学习、去实践、去观察.”因此,在数学课堂教学中,我们必须坚持以问题为导向,引导学生对问题不同表达方式进行合理表征,牢牢把握数学问题的本质,以便顺利地解决问题,促进学生对所学知识的深度理解.

【案例 1】 直线与圆的有关最值问题.

我们都知道,圆外一定点到圆上动点的距离的最大值为该点到圆心的距离加上半径,最小值为该点到圆心的距离减去半径.

例 1 (2018 年扬州市一模第 12 题)已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 2,点 P 为线段 AB 中垂线上任意一点,Q 为射线 AP 上一点,且满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=1$,则 $|\overrightarrow{CQ}|$ 的最大值为________.

师:涉及有关向量问题,我们处理的方法一般有两种:基底法和坐标法.那你们选择哪种方法?

生:坐标法,以 AB 所在的直线为 x 轴,AB 的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系,因为 $\triangle ABC$ 的边长为 2,所以点 C 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$.

师:很好,要求 $|\overrightarrow{CQ}|$ 的最大值,只要研究动点 Q 的轨迹即可.那么如何求出呢?

生:由题意得 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,$(0,\sqrt{3})$,可设 $Q(x,y)$,$P(0,t)$,则由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=1$ 得 $(1,t)\cdot(x+1,y)=1$,即 $x+ty=0$.又 Q 为射线 AP 上一点,所以 $\frac{y}{x+1}=\frac{t}{1}$,即 $y=t(x+1)$,代入 $x+ty=0$ 得 $x^2+x+y^2=0$.所以点 Q 的轨迹是以 $M(-\frac{1}{2},0)$ 为圆心,$r=\frac{1}{2}$ 为半径的圆.故

$$|\overrightarrow{CQ}|_{\max}=|CM|+r=\frac{\sqrt{13}+1}{2}.$$

变式 1 (2018 年南通一模第 13 题)在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(-4,0)$,$B(0,4)$,从直线 AB 上一点 P 向圆 $x^2+y^2=4$ 引两条切线 PC,PD,切点分别为 C,D.设线段 CD 的中点为 M,则线段 AM 的长度的最大值为________.(答案:$3\sqrt{2}$.)

变式 2 (2018 年苏北七市二模第 12 题)如图 1,在平面四边形中,$AB=4$,$AD=2$,$\angle DAB=$

基金项目:江苏省教育科学“十二五”规划 2013 年度普教重点自筹课题——多元表征在数学问题解决中的应用研究(B-b/2013/02/063)

$60°$，$AC=3BC$，则边 CD 长的最小值为________.

(答案：$\frac{\sqrt{61}-3}{2}$.)

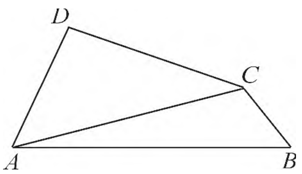

图 1

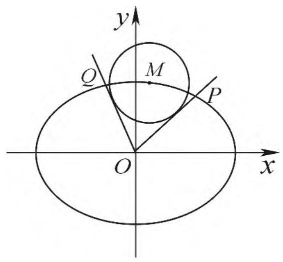

图 2

评析　《普通高中数学课程标准》(2017 年版)指出："数学抽象是指通过对数量关系与空间形式的抽象，得到数学研究对象的素养." 本案例中涉及的三道题，考查学生的数学抽象与表征能力，其本质都是"圆外一定点到圆上动点的距离最值问题"，只不过是命题者在圆的表征上精心设计，将"具体圆" 变为"隐形圆"，比如，例 1 通过向量"$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=1$" 给出，考查向量数量积等知识；变式 1 通过线段 CD 的中点M 的轨迹；变式 2 通过"$AC=3BC$" 给出，与阿波罗尼斯圆等数学文化相结合. 教师在讲解时，如何发现"隐形圆" 是关键，要着力引导学生运用已有知识对题设条件(圆的其他表征形式) 进行合理转化. 教师引导学生总结常见的策略：一是利用圆的定义；二是动点 P 对两定点 A，B 的张角是 $90°$($k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$ 或$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$)；三是两定点$A$，$B$，动点$P$ 满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda$；四是两定点$A$，$B$，动点$P$满足$PA^2+PB^2$ 是定值；五是两定点 A，B，动点 P 满足 $AP=\lambda BP(\lambda>0,\lambda\neq 1)$，加深学生对这类题的理解.

二、关注思维探寻结论，实施深度思考，提升逻辑推理素养

在日常教学活动中，有的教师会不自觉地剥夺了学生的思考，忽视了"思" 的过程，忘却了教学的本质，常常为了赶进度而用教师的讲解来替代学生的思考. 爱因斯坦曾经说过："学习知识要勤于思考，思考，再思考." 因此，我们应该把学生的思考作为整个教学活动的核心，更多地引导学生思考什么？怎样思考？思考的结果会怎样？这样的课堂才是真实的、有效的、智慧的、精彩的. 因此，教师必须关注学生"思" 的过程，实施深度思考.

【案例 2】圆与圆锥曲线相综合.

如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，设点 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1$ 上的一点，从原点 O 向圆 M：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=8$ 作两条切线分别与椭圆 C 交于点 P，Q.

(1) 若点 M 在第一象限，且直线 OP，OQ 互相垂直，求圆 M 的方程；

(2) 若直线 OP，OQ 的斜率存在，分别记为 k_1，k_2，求 k_1k_2 的值；

(3) 试问 $|OP|^2+|OQ|^2$ 是否为定值？若是，求出定值；若不是，说明理由.

答案：(1) 圆 M 的方程为$(x\pm 2\sqrt{2})^2+(y\pm 2\sqrt{2})^2=8$；(2)$k_1k_2=-\frac{1}{2}$；(3)$OP^2+OQ^2=36$.

在讲解完这道题后，教师继续引导学生深入研究上述结论的一般性.

师：通过上述计算，我们不难发现 k_1k_2 是定值，请同学们观察这个定值与椭圆的基本量 a，b 有什么关系？$|OP|^2+|OQ|^2$ 是定值，它与椭圆基本量 a，b 又有什么关系？圆 M 的半径与椭圆基本量a，b 的关系如何呢？

生：k_1k_2 为定值$-\frac{b^2}{a^2}$；$|OP|^2+|OQ|^2$ 为定值 a^2+b^2；圆 M 的半径 $r=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$.

师：是偶然还是必然呢？你能给予证明吗？

结论　设点 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点，从原点 O 向圆 M：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 作两条切线分别与椭圆 C 交于点 P，Q，直线 OP，OQ 的斜率分别记为k_1，k_2.

(1) k_1k_2 为定值$-\frac{b^2}{a^2}$；

(2) $|OP|^2+|OQ|^2$ 为定值 a^2+b^2.

变式 1　如图 3，在平面直角坐标系 xOy 中，设点 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的一点，从原点 O 向圆 M：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 作两条切线分别与椭圆 C 交于点 P，Q，直线 OP，OQ 的斜率分别记为 k_1，k_2.

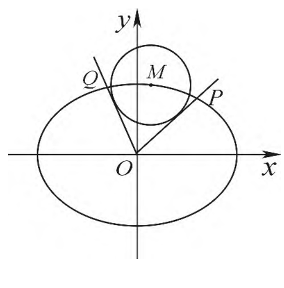

图 3

(1) 若圆 M 与 x 轴相切于椭圆 C 的左焦点，求圆 M 的方程；

(2) 若 $r=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，① 求证：k_1k_2 为定值；② 求

$|OP|\cdot|OQ|$ 的最大值.

变式 2　设 O 为坐标原点,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,以椭圆 C 的长轴长、短轴长分别为两邻边的矩形的面积为 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 P,Q,M 是椭圆上的点,且圆 M 与直线 OP,OQ 相切,$k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\frac{1}{4}$,求圆 M 的半径.

评析　《普通高中数学课程标准》(2017 年版)指出:"逻辑推理是指从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题的素养. 主要包括两类:一类是从特殊到一般的推理,推理形式主要有归纳、类比;一类是从一般到特殊的推理,推理形式主要有演绎."我们在讲解例题时不能为解题而解题,而应该鼓励学生对特殊的结论进行审视与思考,发现问题、提出问题、探究问题、得出一般性数学结论,进而发展学生的数学逻辑推理素养.

三、类比猜想精心求证,实施深度探究,提升直观想象素养

皮亚杰认为,人对知识的接受不外乎"同化"和"顺应",知识是由主体和外部世界不断相互作用而逐渐建构的结果. 真正的学习并不只是由教师传授给学生,而更重要的是出自学生本身,让学生自发地、主动地学习. 教师必须基于学生"行"的需要,营造学习真正发生的安静场所,让学生学会倾听,变"被动学习"为"主动探究",关注学生品行与探究能力的发展、关注学生生命的成长.

【案例 3】解析几何中三角形面积问题.

背景　已知圆 O 的方程是 $x^2+y^2=r^2$,点 A,B 是圆上两点,则 $\triangle ABO$ 面积的最大值为________.(答案:$\frac{1}{2}r^2$.)

探究 1　已知圆 O 的方程是 $x^2+y^2=r^2$,则圆内接三角形 ABC 面积的最大值为________.(答案:r^2.)

探究 2　已知圆 O 的方程是 $x^2+y^2=r^2$,则圆内接四边形 $ABCD$ 面积的最大值为________.(答案:$2r^2$.)

类比　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,点 A,B 是椭圆上两点,则 $\triangle ABO$ 面积的最大值为________.(答案:$\frac{1}{2}ab$.)

探究 3　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,则椭圆内接三角形 ABC 面积的最大值为________.(答案:ab.)

探究 4　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,则椭圆内接四边形 $ABCD$ 面积的最大值为________.(答案:$2ab$.)

评析　本案例中教师引导学生通过类比发现问题、提出问题、探究问题,从圆心与圆上两点三角形面积的最大值类比到椭圆中心与椭圆上两点三角形面积的最大值;从圆内接三角形的面积最大值类比到椭圆内接三角形面积的最大值;从圆内接四边形的面积最大值类比到椭圆内接四边形面积的最大值,激发学生的探究之情,自觉进行微探究,促进学生深度学习,同时,类比思想渗透在本案例中发挥得淋漓尽致.

四、突出重点展现亮点,实施深度总结,提升表达反思素养

课堂小结可以说在整节课中起到画龙点睛的作用,总结得是否到位、是否深刻?直接影响到学生对本节课知识的掌握程度与理解水平层次. 因此,我们必须站在发展学生素养的高度,突出本节课的重点、难点、关键点,挖掘本节课所涉及到的数学思想、方法、策略等.

【案例 4】"微专题:解析几何中三角形面积问题"课堂小结.

A 老师的课堂总结:

一、三角形面积表示方法:

(1)$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高;

(2)$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}r^2\sin\theta$;

(3)$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times OM\times|y_P-y_Q|$;

(4)$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|x_Q-x_P|$.

二、求目标函数最值方法:

1. 导数法;2. 基本不等式法;3. 函数单调性法.

B 老师的课堂总结:

一、1. 三角形面积表示方法的多样性与灵活性;

2. 处理三角形面积的最值与范围问题:

(1) 构建目标函数;(2) 几何方法;(3) 面积比的问题,可以通过"降维"处理.

二、两个意识:1. 预判意识;2. 优化意识

三、一个思想:类比思想

评析　这是两节同课异构微专题课堂总结比

较,A 老师的总结给人的感觉是显得肤浅、匆忙草率,只是对一些知识和方法简单的罗列;而 B 老师的总结更胜一筹,提升一个档次,深入总结了解题的方法、解题策略、解题意识和数学思想.

总之,“将外在的学习内容转化为内在的精神力量”是深度教学和深度学习的永恒追求.在当今新时代核心素养背景下,要让学生进行深度学习,教师必须实施深度教学,必须遵循学生认知的一般规律,契合学生学习的阶段特点,进行深度地备课、以学定教、循序渐进,引导学生全身心理解、思考、探究、反思,促成学生高度认知的参与,深度学习才能真实发生.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018 年 1 月.

[2] 史宁中,王尚志. 普通高中数学课程标准(2017 年版)解读[M]. 北京:高等教育出版社,2018 年 5 月.

[3] 董荣森. 精准定位教学,让学习真正发生[J]. 数学通讯(下半月),2018(9).

(收稿日期:2018 — 12 — 01)

教会学生思考　提升课堂质量
—— 基于“任意角的三角函数”同课异构评析

陈小艳　周思波

(四川师范大学数学与软件科学学院,610068)

1. 引言

南京师范大学涂荣豹教授提到,教学的首要任务是教学生学会思考,即探寻从无到有或从有到优的思路,从而帮助学生理解数学本质.

为更好地聚焦高中数学学科核心素养和高中教学新课标,探究高中数学课堂改革趋势,推进数学教学改革,提升数学教师的专业素养,成都市锦江区教师进修校和四川师范大学附属中学联合组织开展了以核心素养为导向的高中数学研修活动,来自北京理工大学附中的关老师和四川师范大学附中的李老师就“任意角的三角函数”一节进行了同课异构,并邀请了首都师范大学的王尚志教授评课.

2. 两位教师的课堂设计

2.1　李老师的课堂设计

(1) 设置情境,引入新课

以摩天轮为背景,将摩天轮近似地看成一个圆形并将其放在直角坐标系中(圆心与坐标原点重合),小强乘坐的车厢位于圆与 x 轴正半轴的交点,并在交点处开始逆时针旋转上升,问经过一段时间后小强所处的位置.

(2) 回顾旧知,引发思考

上述问题的解决用到了锐角三角函数,于是教师顺势引导学生回顾初中所学锐角三角函数的定义,在此基础上,本节课以问题串的形式展开教学,具体情况如下.

问题 1　将锐角三角形放入直角坐标系中,如何定义 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 呢?

问题 2　根据上述对 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的定义,对于给定的锐角 α,你认为 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$,$\tan\alpha$ 的值是否会随着终边上点 P 的位置的改变而改变呢?

问题 3　你能否通过选取终边上适当的点而将 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的表达式简化?

解决了上述一系列问题之后,教师自然地过渡到“用同样的方法对任意角 α 给出其正弦、余弦和正切的定义”,然后给出任意角的三角函数的概念.

(3) 深入探究,强化概念

得到任意角的三角函数的定义后,教师给出了相应的例题强化概念,并提出两个思考题.

思考 4　为什么 $\sin\alpha$ 是 α 的函数?其定义域是什么?

思考 5　你能否说出 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的符号与 α 的终边所在位置的关系?

解决了这两个思考题后,教师给出了相应的例题并引导学生解决问题,之后教师对本节内容做了

总结,整堂课伴随着下课铃声结束了.

2.2 关老师的课堂设计

关老师执教的这节课与传统教学方法完全不同.首先让同学们合上书本,并讲明本节课只是简单地和大家聊聊三角函数,同学们只需适当地做些笔记即可,这一做法给学生们营造了一种轻松愉快的课堂氛围.关老师的教学活动主要通过几个问题层层展开.

问题 1:你学过哪些函数?它们是怎么定义的?

学生在教师的引导下回顾了曾经学过的正比例函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数等,此外,有的同学也提到了对勾函数及一次分式函数.通过回顾旧知,教师带领学生总结了上述函数定义的形式为“一般地,函数 …… 叫作指数函数”、“一般地,函数 …… 叫作对数函数”等,但这样的函数定义似乎“不讲理”.

问题 2:举例说明你认识的三角函数.

学生轻易地回答了 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 等特殊角的三角函数值(问题是三角函数,学生回答的却是函数值).然后教师再提问:既然我们前面已经学过了三角函数,那今天为什么还要讲三角函数呢?因为前面已经将角度扩展到了任意角,所以我们现在需要了解的不仅仅是初中所学的锐角三角函数了,还需要学习任意角的三角函数.

问题 3:如果请你给任意角的三角函数下定义,你准备怎么办?

在教师的引导下,以“终边定义法”而非“单位圆定义法”的形式给出了正弦、余弦、正切、余切以及正割、余割等六种三角函数的定义.

问题 4:知道了任意角的三角函数定义后,你还想了解关于三角函数的哪方面内容?

教师提示学生按照研究函数的一般思路(函数的定义域、值域、图象,奇偶性、单调性等)对三角函数进行研究.

课后思考题:请你根据今天我们的研究思路,自己研究余弦函数、正切函数的性质,尝试用数学语言进行表述,并进行简单的证明.

3. 课堂评析

3.1 对李老师的教学过程的评析

李老师的整个课堂流畅自然,从生活事实出发抽象出数学问题,以问题作引领并且问题设置得当、层层深入,有一定的启发性,属于传统性教学.总体而言,李老师的课堂较为成功,顺利地将知识传递给了学生,但有些地方的设计还有待商榷:

(1)李老师的课堂以同学们都熟悉的摩天轮来设置问题引入课堂,但引导学生回顾了锐角三角函数的定义之后就未出现与之相关的内容,有点“为了情境而情境”的嫌疑,给人的感觉是这一情景的存在与否对本节课似乎没有多大影响.

(2)整个教学过程与教材类似,先由初中所学的锐角三角函数为切入点,再将其放在直角坐标系中研究,然后将点特殊化,用类似初中的定义得到任意角的三角函数的定义.这样的处理方式会使学生形成一种错误认知:任意角的三角函数是否是锐角三角函数的推广呢?因为,在整个教学过程中,李老师似乎并未强调任意角的三角函数是描述生活中的周期现象的函数模型.

总的来说,学生从课堂中学到了需要学到的知识,但学生的主体地位并未得到充分的展现,学生虽然参与了教学活动,但大多数时间还是教师主导着整个课堂,学生只是跟着教师的思路被动地学习.

3.2 对关老师的教学过程的评析

关老师为我们呈现的“任意角的三角函数”这节课的课堂氛围轻松愉悦,与传统的教学方式不同,给人耳目一新的感觉.本节课以研究函数的方法为导向,教学过程中多以学生讲解为主,并对学生的回答进行深入挖掘,学生的主体性得到了充分的展现,但是学生习惯了传统的课堂,这样的教学方式对于学生来说不一定都能接受.关老师在本节课中可能更想教给学生的是研究函数的方法,似乎偏离了本节课的主题——任意角的三角函数,笔者认为本节课的重点应放在教会学生理解三角函数的概念,区分任意角的三角函数与以前学过的锐角三角函数的不同之处上,把教学重心放在教会学生研究函数的方法似乎有失偏颇.

4 任意角的三角函数的教学设计

在对两位教师的教学进行深入反思的同时,笔者也查阅了有关“任意角的三角函数”的教学设计,大致分为两类:一是由初中所学的锐角三角函数过渡到任意角的三角函数[1];二是从使用何种函数模型刻画客观世界“周而复始”的变化现象入手来研究[2]-[4].

在“任意角的三角函数”的教学中,需要思考以下问题:

(1)明确锐角三角函数、任意角的三角函数以及三角函数三者之间的区别与联系.

(2)平面直角坐标系和单位圆为我们理解三角函数带来了哪些好处?只是在引入概念时起作用,还是在整个三角函数的教学过程中都起作用?

对上述问题进行深入思考后,笔者以李老师课堂中提到的摩天轮为主线,对“任意角的三角函数”进行了简单的教学设计.

环节一:感悟周期,引入新知.

(在课件上呈现一些呈周期变化的动态图片)日出日落,寒来暑往,自然界中存在许多“按一定规律周而复始”的现象,称为“周期现象”.我们曾用“指数函数”模型刻画人口增长问题、储蓄中复利计算问题,用“对数函数”模型刻画地震的震级变化、溶液酸碱度的 pH 值变化,那么,生活中的周期现象该用什么样的数学模型进行刻画呢?

环节二:创设情境,建立模型.

周期现象一般与周期运动有关,一个简单而基本的例子如“圆周上一点的旋转运动”:

假设摩天轮的中心离地面的距离为 h_0,转轮的半径为 r,逆时针方向匀速转动一周需要 360 秒,若现在你坐在座舱中,从初始位置点 A 出发(如图 1 所示),求你相对于地面的高度 h 与时间 t 的函数关系式.

如图 2,人距离地面的高度 $h=h_0+MP$,其中 h_0 是不变量,MP 表示点 P 到水平位置的距离,可以通过点 P 旋转 $\angle POA$ 的大小,利用初中锐角三角函数来计算.

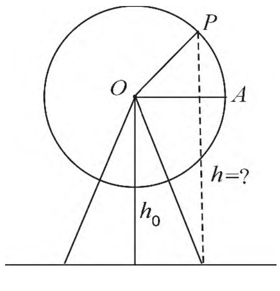

图 1

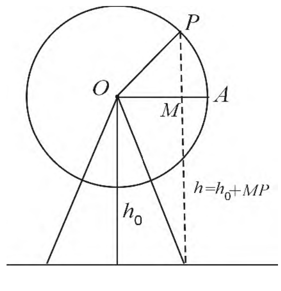

图 2

随着时间 t 变化,点 P 的位置在变化,角度 $\angle POA$ 在变化,进而 MP 的值在变化.过了 50 秒,$h=h_0+r\cdot\sin 50^\circ$;过了 70 秒,$h=h_0+r\cdot\sin 70^\circ$,…… 由此猜想经过 t 秒之后人距地面的高度为 $h=h_0+r\cdot\sin t^\circ$.

环节三:继续探究,分析模型.

这样想合情,但合理吗?有什么问题?

随着摩天轮的转动,角度也开始推广到了任意角.那么对任意角 α,$\sin\alpha$ 该如何定义呢?由此引出任意角三角函数.

对前面的问题继续分析,虽可通过转化为锐角三角函数计算各种情况,但表述太繁琐,当时间为 t 秒时,猜想:$h=h_0+r\cdot\sin t^\circ$,形式简洁,与 $h=h_0\pm MP$ 比较,要想两者和谐统一,必须有:

$$r\cdot\sin t^\circ=\pm MP,\text{即 }\sin t^\circ=\pm\frac{MP}{r}.$$

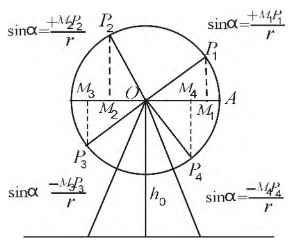

图 3

如图 3,点 P 在圆周上运动,引起 $\angle POA$ 的变化,任意的某个 $\angle POA$,对应着唯一点 P,进而有唯一的 MP,得到 $\sin\angle POA=\pm\frac{MP}{r}$,可以用什么量来代替 $\pm MP$,使表述更简洁呢?它的绝对值与 MP 长度相等,符号在区域 Ⅰ、Ⅱ 是正的,在区域 Ⅲ、Ⅳ 是负的.

由此引入直角坐标系,用点 P 的纵坐标 y 值来替代 MP 或 $-MP$.

环节四:得出定义,多方检验.

能否通过上述求解过程,给出任意一个角的正弦的定义呢?

首先要借助直角坐标系,把 α“放在”直角坐标系内,接下来,要以原点为圆心作圆,半径为 r,与 α 的终边上相交于点 P,得点 P 的坐标 (x,y),那么,$\sin\alpha=\frac{y}{r}$,接下来讨论这样定义的合理性.

(1) 当 α 是锐角时,此规定与初中定义是否矛盾?

答:不矛盾,而且坐标法的引入摆脱了锐角的束缚.

(2) 圆的半径 r 的大小有限制吗?

根据相似三角形的知识,对于确定的角 α,这个比值不会随点 P 在 α 的终边上的位置的改变而改变,是唯一确定的.

(3) 半径 r 取多少时,会使得比值更加简洁?

取 $r=1$,这样的圆称为单位圆.

上述三个问题的解决,印证了之前猜想的正弦函数的定义的合理性,再引导学生类比正弦函数的定义,给出任意角的余弦、正切的定义,从而得到任意角的三角函数的定义.

得到三角函数的定义之后,再引导学生思考解决:为什么称它们为“函数”,怎样从一般函数概念角度来理解正弦、余弦、正切函数?

最后,例题以及作业的布置也可围绕摩天轮进行设计,例如:

(1) 若摩天轮每秒旋转 0.1 rad,请问经过 10s、

20s 之后你所在位置距离地面的高度?

(2) 若距离地面的高度为 $h_0+\frac{r}{2}$,这时摩天轮转动了多长时间?

(3) 若从摩天轮的最低点开始逆时针旋转,其他条件都不改变,这时该如何表示所在位置与地面高度的关系?

5 教学设计的思考

锐角三角函数是研究三角形各种几何量之间的关系而发展起来的,任意角三角函数是研究现实中的周期现象而发展起来的,它们研究的对象不同,表现的性质也不同[5]. 同时,三角函数作为刻画生活中的周期现象的数学模型,绝不仅仅限制于角的研究. 单位圆及直角坐标系作为数形结合的重要载体,有助于培养学生的直观想象力,让学生感受到数学的进步是看得见、摸得着的.

原来的教学是"嚼烂了喂",现在是"嚼烂了自己吃",因此教师既要通过不断的思考将知识背后的联系、所蕴含的最重要的东西挖掘出来,也要教会学生思考,从而帮助学生理解数学.

参考文献:

[1] 钮兆岭. 任意角的三角函数的教学设计与说明[J]. 数学教学通讯,2012(27):12-13,24.
[2] 顾艺玮. 感悟概念形成参与问题探究 —— 谈"任意角的三角函数" 教学设计[J]. 中学数学月刊,2016(09):33-35.
[3] 王芝平. 构建三角函数刻画周期现象 —— 任意角三角函数概念的教学反思[J]. 数学通报,2012,51(01):25-26,12.
[4] 吴洪生. 基于核心素养的"任意角的三角函数" 教学案例[J]. 中学数学教学参考,2017(25):14-17,23.
[5] 章建跃. 为什么用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数[J]. 数学通报,2007(01):15-18.

(收稿日期:2018 — 11 — 26)

(上接第 13 页)

说明,直到得到全体同学的认可为止;视情况可对零点存在的个数作进一步的探究.

重难点达成分析:学生能积极参与讨论,提出自己的想法,体验不同的图像和存在零点的关系,能通过讨论猜想论证区间 (a,b) 内零点存在的条件,即达成目标(2)④.

片段 2:活动 5.

变式 2 (1) 判断函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在区间 $(1,3)$ 上是否存在零点.

(2) 判断函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在区间 $(-2,3)$ 上是否存在零点.

组织形式:组织学生先自己解决问题,再进行讨论比较,从中得出零点存在定理的"逆命题" 不一定成立,从而感受零点存在定理的"存在" 的意义.

重难点达成分析:能顺利解决问题(1),并能比较两问题的本质区别,感受零点存在定理的"存在" 的意义,即达成目标(2)⑥.

五、后语

苏联数学教育家斯托利亚尔指出:"积极地数学教学,应为数学活动(思维活动) 的教学,而不是数学活动结果 —— 数学知识的教学". 高效课堂的根本是学生对所学知识的体验程度,教学设计就要对课堂教学内容进行优化重组,要围绕教学难点有针对性设计学生活动. 这样的课堂才能让学生少走弯路,体验知识的生产过程,感受数学知识的来龙去脉,体验思维的过程,保证难点的突破.

数学概念教学设计总是基于学科知识、课程知识、学生知识三者之上的,教师只有吃透教材教参、摸清学生知识现状与能力实际,找准教学目标与学生学情之间的最近发展区,才能充分调动教师个人 PCK,利用活动探究、形象类比、逻辑推理、实际情境等具体教学策略进行教学过程最优化设计,从而为达到教学效能的最大化提供可能. 因此,具有良好的 PCK 对于有效促进课堂教学具有关键性的推动作用,作为青年教师的我们,应在平时教育教学中不断优化自己的 PCK 结构,从而为个人的专业发展提供助力.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京:人民教育出版社,2003.
[2] 普通高中课程标准实验教科书·数学必修 1[M]. 南京:江苏教育出版社,2007.
[3] 卓杰. 课堂教学目标分解与达成分析的实践与思考[J]. 数学通讯(下半月),2016(3):5-9.

(收稿日期:2018 — 11 — 28)

传播数学文化　启迪数学思维

—— 以高三数学复习课《再探极限思想》为例

顾彦琼

(上海市浦东新区惠南镇学海路 288 号 上海南汇中学，201399)

数学复习课是数学教学中不可或缺的重要环节，它具有重复性、概括性、系统性和综合性等特点；数学复习课要在重复和概括的基础上进行梳理，使数学知识和数学思想方法系统化、综合化.[1] 而在数学复习课中合理整合教材，运用数学文化内容，建立数学文化共同体，可以让复习课更丰富多彩，更具有系统性，起到传播数学文化和启迪数学思维的作用.

数学文化与数学课堂文化都有一个共同体的支撑，数学文化共同体的内核是数学家和数学工作者组成的数学共同体，而数学课堂文化的共同体是师生共同体. 都是为了更好地理解、掌握数学并促进数学的应用与发展. 其次，数学文化构成了数学课堂文化的一个基本内核和要素，数学文化作为一种科学思想的长期积累，有其独特的科学组织和传统，包括数学知识的创造、记录、流传、交流和传播方式等.[2]

一、"数学文化" 复习课课堂教学案例

【教学目标】

1. 通过本节课的学习，理解无穷等比数列各项和的概念，并能熟练运用公式；

2. 经历运用极限思想解决各类问题的过程，不断提高学生的抽象概括、从特殊到一般、逻辑推理和逆向思维等思维能力，感悟"无限" 的魅力；通过观察项数无限增大时数列的项的变化趋势，体会有限与无限、近似与精确、量变与质变的辩证关系；

4. 通过了解相关数学及背景知识，提高拓展性数学内容的多种组合，呈现数学学习的多元化，开阔数学视野，从而使学生更加热爱数学，体会数学的文化价值.

【教学重点及难点】

教学重点：理解无穷等比数列各项和的概念与公式.

教学难点：综合应用极限方法解决具体问题.

【教学方法】

教法：启发诱导、问题驱动.

学法：自主体验、归纳生成、抽象概括、合作交流、自主探究、反思总结.

【教具准备】

电脑、多媒体课件、课本.

【教学过程】

(Ⅰ) 极限思想的回顾

导语：我们在高二的学习及高三第一轮复习中，从直观描述上理解了数列极限，会求无穷等比数列各项和，今天我们再从历史到课堂，从高考模拟题到现实世界中去再次体会极限思想的光芒.

设计意图：告知学习者目标，给学生呈现学习目标传达了对学习者表现出的知识和技能的一种期望. 告知学习者目标只需要很少时间，而且陈述目标的行为可能有助于教师把教学维持在教学目标上.

1. 趣味问题 —— 引起注意

引出数学史一个经典问题"芝诺悖论" 的"阿喀琉斯追龟" 问题："假设一开始阿喀琉斯距乌龟 1000 米，阿喀琉斯的速度是乌龟的 10 倍. 问：阿喀琉斯在何处追上乌龟？'

设计意图：通过对数学历史上的趣味问题的提出，与小学数学学习阶段的同向追击问题对比冲击，让学生感受无穷等比数列各项和在解决数学问题中的应用. 体验、探索具体问题中的数量关系和变化规律，能选择适当的知识去解决问题，转化为等比数列，揭示性质，并熟练运用公式求值. 既引出本节课的课题，也更加吸引了学生的注意力，激发了学生的好奇心，使其主动参与到本节课的学习中来.

2. 巩固旧知 —— 提出问题

让学生从前面熟悉的追击问题中寻找无穷等比数列求和与极限的关系，进而提出问题，可以在二维中体会运用极限思想.

设计意图：通过对一维模型的分析感知，注重知识的前后联系，有利于提高无穷等比数列各项和的应用，促进学生思维的数学化.

(Ⅱ)极限思想的综合应用

1. 回归教材 —— 体验应用

例 1 如图 1,在 Rt$\triangle ABC$ 内有一系列的正方形,它们的边长依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$. 若 $AB=a$, $BC=2a$,求所有正方形的面积的和.

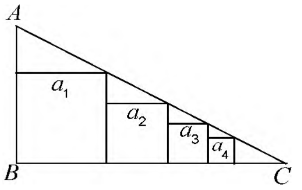

图 1

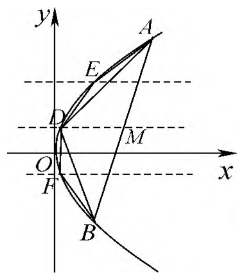

图 2

设计意图:通过教材中的原有例题(例题选自沪教版高中数学课本高中二年级第一学期 48 页例 4),回顾教材,温故知新,创造学生重新学习教材和理解极限概念的机会. 这样既使得高三复习课能体现注重基础,注重数学通性通法的本质,又可以让学生重视教材,重视概念,走出高三第二轮复习进行"题海战术"的误区.

让学生板演交流感受形成共识:① 求正方形面积的和转化为无穷等比数列求和问题;② 从特殊到一般,从找到 a_1,a_2 的关系到确定 a_{n-1},a_n 的关系.

设计意图:深化无穷等比数列各项和的使用条件,强调解题书写过程的完整性.

2. 思维过渡 —— 激发求知

提出问题:我们在平面几何中运用了极限思想去求出正方形的面积之和,那么,在解析几何中是否也有类似应用?

设计意图:通过问题约定学生的思考,激发学生强烈的新应用寻求欲望. 完成从平面几何到解析几何运用极限思想教学的过渡.

3. 梯度设计 —— 循序探究

例 2 抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$,设直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与抛物线 C 交于两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,且 $|y_1-y_2|=a\ (a>0)$,M 是弦 AB 的中点,过 M 作平行于 x 轴的直线交抛物线 C 于点 D,得到 $\triangle ABD$,如图 2.

(1) 用字母 k,b,p 表示 a^2,再计算 $S_{\triangle ABD}$(用字母 a,p 表示).

(2) 再分别过弦 AD,BD 的中点作平行于 x 轴的直线依次交抛物线 C 于点 E,F,求 $\triangle ADE$, $\triangle BDF$ 的面积.

(3) 设计一种求抛物线 C 与线段 AB 所围成封闭图形面积的方法,并求出此封闭图形的面积.

设计意图:通过同一题干式例题的设计,用递进式问题启发学生进行观察、计算,并通过学生的小组讨论,得到探究学习的效果. 递进式设计,促进学生发展,符合布鲁纳"提供支架"的教学原理. 具体而言,例 2 第(1)题提供支架,巩固基础,第(2)题递进设计,联想推广,运用已知结论,迁移解决新问题,并探究它们之间的联系;第(3)题启发思维,发展智力,鼓励更多学生参与. 其中对于第(3)题设计学生讨论,教师巡视辅导的策略,联系前面两个问题获得的启发,综合运用极限思想,寻求计算封闭弓形的面积,并归纳说明解题过程,培养学生综合运用、规范表达的基本数学素养.

从平面几何到解析几何的例题分析,体会几何代数化的转折过程,具体在这里体现比如求点的坐标转化为求直线方程与抛物线方程的解,求线段 DM 的长度转化为了横坐标的差,领悟解析几何的基本思想.

思考题:如图 3,求抛物线 $y=x^2$、x 轴以及直线 $x=1$ 所围成的区域的面积.

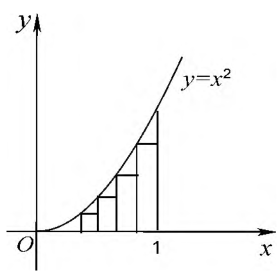

图 3

设计意图:应用结论,收获成就;另辟蹊径,拓展思维. 把例 2 的结论与思考题联系起来,体验学习经验可带来成功感,帮助学生对自己的成就形成一种积极的情感,提高学生对自己胜任数学思考能力的信念. 在学生最近发展区中得到突破和提升,同时,从不同角度,也可以用微元法进行分析解决,一是拓宽了学生的解题思路,提高了学生的思维广度,二是和数学学科中重要的分支微积分相联系,强化对科学成果的发生发展来之不易的认识,并对学生学习高等数学起到衔接作用.

(Ⅲ)极限思想的历史发展

1. 数学历史 —— 文化熏陶

说明微元法与莱布尼茨和牛顿(图 4)的伟大成果"微积分"有关,而微积分是科学史上璀璨的成果之一,简述爱因斯坦(图 5)对牛顿"微积分"的高度评价.

图 4

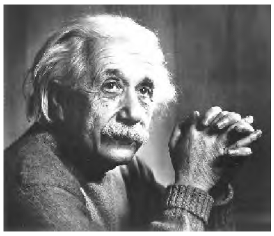

图 5

设计意图:从一个伟人对另一个伟人成果的高度评价,强化学生对微元法的重视,从而起到对极限思想的重要性有更深刻的认识.

2. 走近先哲 —— 激发热情

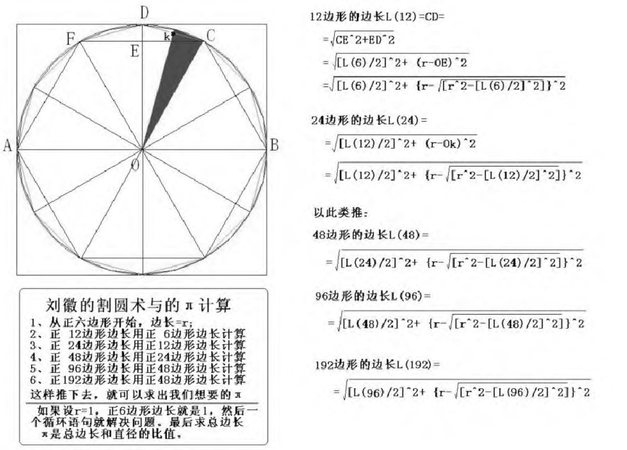

图 6

对刘徽割圆术(图 6)与阿基米德的穷竭法相联系,体现古今中外数学家的智慧. 对刘徽在《九章算术》中的《阳马术》这一章节进行简述.

设计意图:相关内容选自高三年级数学教材第 43 页的阅读材料《中国数学史中的体积计算》,通过引入阅读材料可使学生了解古代计算体积的方法和古人的数学智慧,特别是其中所蕴含的极限思想,并从二维的求面积过渡到三维求体积的应用.

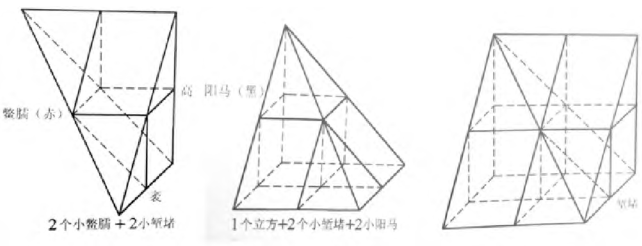

图 7

3. 动画展示 —— 分析思考

① 展示用无穷小的边长做一个圆内部的所有同心圆,铺满整个圆,然后展开变成一个直角三角形,这样形象地说明了"化曲为直"的思想,直观上体现了微元法的奇妙之处.

设计意图:通过滚动圆的展示,更直观地展示了"微元法"的应用,对于无穷小量有更深刻的理解.

② 展示雪花曲线与谢尔宾斯基海绵的动态图

设计意图:简单联系"分形几何",找到初等数学与高等数学的中间地带.

(Ⅳ) 极限思想的应用总结

(Ⅴ) 极限思想的任务外延

1. 已知点 $R(x_0, y_0)$ 在 $\Gamma: y^2 = 2px$ 上,以 R 为切点的 Γ 的切线的斜率为 $\dfrac{p}{y_0}$.

过 Γ 外一点 A(不在 x 轴上)作 Γ 的切线 AB、AC,点 B、C 为切点,作平行于 BC 的切线 MN(切点为 D),点 M、N 分别是与 AB、AC 的交点(如图 8),

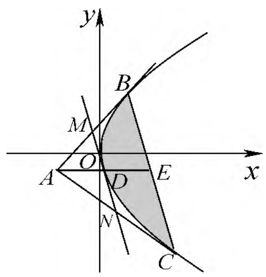

图 8

(1) 用 B、C 的纵坐标 s、t 表示直线 BC 的斜率;

(2) 若直线 AD 与 BC 的交点为 E,证明 D 是 AE 的中点;

(3) 设 $\triangle ABC$ 面积为 S,若将由过 Γ 外一点的两条切线及第三条切线(平行于两切线切点的连线)围成的三角形叫"切线三角形",如 $\triangle AMN$,再由 M、N 作"切线三角形",并依这样的方法不断作切线三角形 ……,试利用"切线三角形"的面积和计算由抛物线及 BC 所围成的阴影部分的面积 T.

2. 由例 2 的思考题出发,解决此问题:

已知对任意大于 4 的正整数 n,不等式 $\sqrt{1-\dfrac{1^2}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2^2}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{1-\dfrac{(n-1)^2}{n}}<an$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为________

3. 上网搜索了解中外数学家在极限思想运用上的研究成果.

二、基于"数学文化" 教学案例的反思

《再探极限思想》的授课对象是上海市示范性高中三年级的学生,他们有较好的学习习惯,有一定

(下转 54 页)

分享探究一个模拟题的心路历程

查晓东 陶 晖
(江苏省无锡市江苏省天一中学,214101)

《黍离》有云:"知我者谓我心忧,不知我者谓我何求."笔者看来,这句话很好地概括了解题者与命题者的心绪,然而命题者的心思又岂是能轻易揣摩得到的?因此,解题的乐趣往往在于命题者的独具匠心与解题者的独具慧眼取到交集时的那种成就感.本文,笔者通过对浙江省湖州市2018年5月高三适应性考试的一个模拟题的探究历程,与读者分享解题的乐趣.

1. 探究历程

题1 (浙江省湖州市2018届高考科目适应性考试第17题)已知函数 $f(x)=|x^3+ax+b|(a,b\in\mathbf{R})$,若对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$,$f(x_1)-f(x_2)\leqslant 2|x_1-x_2|$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

答案:$[-2,-1]$.

1.1 无法之时找启发

处理关系式 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant 2|x_1-x_2|$ 的常规思路是破解绝对值,通过构造新函数,利用函数的单调性求得实数 a 的取值范围,这类题型在全国各省市的高考题、模拟题中屡见不鲜.下面的题2就属于这类问题:

题2 (2010年高考辽宁卷第21题)$f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a<-1$,如果对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

题1与题2的区别在于 $f(x)$ 是一个绝对值函数,因此我们可以借鉴原来的解题经验,从特殊情形入手.

解析1 令 $g(x)=x^3+ax+b$.

(1) 若 $g(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立,则问题等价于 $g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2|x_1-x_2|$.

① 当 $x_1=x_2$ 时,$a\in\mathbf{R}$;

② 当 $x_1<x_2$ 时,$g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2x_2-2x_1\Rightarrow g(x_1)+2x_1\leqslant g(x_2)+2x_2$.

设 $u(x)=g(x)+2x=x^3+(a+2)x+b$,则 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,所以 $u'(x)=3x^2+a+2\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立,解得 $a\geqslant -2$.

③ 当 $x_1>x_2$ 时,$g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2x_1-2x_2\Rightarrow g(x_1)-2x_1\leqslant g(x_2)-2x_2$.

设 $v(x)=g(x)-2x=x^3+(a-2)x+b$,则 $v(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减,所以 $v'(x)=3x^2+a-2\leqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立,解得 $a\leqslant -1$.

综上:$a\in[-2,-1]$.

(2) 若 $g(x)\leqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立,则问题等价于 $g(x_2)-g(x_1)\leqslant 2|x_2-x_1|$,这种情形与(1)完全类似,解得 $a\in[-2,-1]$.

由(1)和(2)两种特殊情形均解得 $a\in[-2,-1]$,恰好与答案相符合.接下来问题就来了,当 $f(x)=\begin{cases}g(x),x\in D_1,\\-g(x),x\in D_2,\end{cases}$ $D_1\cup D_2=[0,1]$ 时,实数 a 的取值范围如何呢?从答案上推敲,应该有"当 $a\in[-2,-1]$ 时,结论成立".那么如何证明呢?

评注 这里需要指出的是,网络上的解法"不妨设 $x_1>x_2$,则 $g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2|x_1-x_2|$ 等价于 $g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2x_1-2x_2$"来破解绝对值的解法是不科学的,由于 x_1,x_2 不对称,这个不妨设其实是"妨碍"的.事实上,从上述解答不难发现"$g(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立"的情形下已经可以得到 $a\in[-2,-1]$,而并非两种情形的交集来得到 $a\in[-2,-1]$.

1.2 有法之时求优化

笔者在进一步的探究中发现,我们可以用绝对值不等式进行放缩来破解题1中的绝对值.

解析2 令 $g(x)=x^3+ax+b$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=|g(x_1)|-|g(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|.$$

由 $|g(x_1)|-|g(x_2)|\leqslant|g(x_1)-g(x_2)|$ 知结论成立的充分条件是

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|.$$

根据 x_1,x_2 的对称性,不妨设 $x_1>x_2$,则 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 2x_1-2x_2$,即

$$2x_2-2x_1\leqslant g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2x_1-2x_2,$$

即 $\begin{cases}g(x_1)-2x_1\leqslant g(x_2)-2x_2,\\ g(x_1)+2x_1\geqslant g(x_2)+2x_2.\end{cases}$

设 $u(x)=g(x)-2x=x^3+(a-2)x+b$,$v(x)=g(x)+2x=x^3+(a+2)x+b$,则 $u(x)$ 在$[0,1]$单调递减,$v(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增,所以 $\begin{cases}u'(x)=3x^2+a-2\leqslant 0,\\ v'(x)=3x^2+a+2\geqslant 0\end{cases}$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立,解得 $-2\leqslant a\leqslant -1$.

那么,如何论证 $-2\leqslant a\leqslant -1$ 的必要性呢?起初,笔者想当然地认为:由于存在 $x_1,x_2\in[0,1]$ 使得 $|g(x_1)|-|g(x_2)|=|g(x_1)-g(x_2)|$,因此 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|$ 是结论的等价条件.继续思考后发现,其实这是一个"双参数"问题,参数 b 也在其中起作用,最终给出了如下的解法.

解析 3　令 $g(x)=x^3+ax+b$,则 $f(x_1)-f(x_2)=|g(x_1)|-|g(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|$.

当 $|g(x_1)|\leqslant|g(x_2)|$ 时,$a\in\mathbf{R}$;

当 $|g(x_1)|>|g(x_2)|$ 时,必然存在 $b\in\mathbf{R}$,使得 $g(x_1)\cdot g(x_2)>0$,即对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$,总有 $|g(x_1)|-|g(x_2)|=|g(x_1)-g(x_2)|$,所以,问题等价于 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|$ 对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$ 恒成立.

根据 x_1,x_2 的对称性,不妨设 $x_1>x_2$,则 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 2x_1-2x_2$,即

$$2x_2-2x_1\leqslant g(x_1)-g(x_2)\leqslant 2x_1-2x_2,$$

即 $\begin{cases}g(x_1)-2x_1\leqslant g(x_2)-2x_2,\\ g(x_1)+2x_1\geqslant g(x_2)+2x_2.\end{cases}$

设 $u(x)=g(x)-2x=x^3+(a-2)x+b$,$v(x)=g(x)+2x=x^3+(a+2)x+b$,则 $u(x)$ 在$[0,1]$单调递减,$v(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增,所以 $\begin{cases}u'(x)=3x^2+a-2\leqslant 0,\\ v'(x)=3x^2+a+2\geqslant 0\end{cases}$ 对任意的 $x\in[0,1]$ 恒成立,解得 $-2\leqslant a\leqslant -1$.

评注　事实上,本题含有两个逻辑联结词"任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$"以及"任意的 $b\in\mathbf{R}$".而参数 b 是对函数的图像起到一个上下移动的作用,在移动的过程中,使得 $|g(x_1)|-|g(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|$ 同时具备了"充分性"和"必要性",进而成为结论成立的充要条件,这样就把本题等价转化为与 2010 年辽宁卷第 21 题同样的问题了.如此看来,我们也可以根据"一般不失特殊"的原理来破解填空题,当 b 移动到特殊情形时,正如解析 1 的两种特殊情形均同样得到了正确答案,其中的原因也就不难解释了.

2　解后有感

(1) 这类题目的背景是拉格朗日中值定理(Lagrange Mean Value Theorem):"如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$连续,在开区间(a,b)可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$."但是,用高等数学的知识解决初等问题往往是不被认可的.事实上,从逻辑角度看 $f'(\xi)$ 与 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 是不是一一对应关系?即"如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$连续,在开区间(a,b)可导,对任意的 $\xi\in(a,b)$,是否总存在 $x_1,x_2\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$?"这个结论显然是不正确的,举一个反例:$f(x)=x^3(x\in(-1,1))$,取 $\xi=0$ 时就不存在满足条件的 x_1,x_2.因此,就本题而言,$|g'(x)|\leqslant 2$ 是结论成立的一个充分条件.然而,细心的读者不难发现 $|g'(x)|\leqslant 2$ 求得的实数 a 的取值范围同样也是 $-2\leqslant a\leqslant -1$,这又是什么原因呢?这个问题留给有兴趣的读者思考.

(2) 必要的解题经验往往能让我们在遇到新的问题时从两者之间的相同或相似之处找到解题方法上的某些启发,然而每一个问题的"个性"又会让这种启发与最终的方法之间存在某种距离.正如老子所言,"道可道,非常道",由此可见,可道之道非常道.因此,笔者认为,必要的解题回顾与反思不仅能加深我们对问题及其解法的理解,同时也能够培养我们解题的科学性与严谨性.因此,我们需要修炼解题过程中的合情推理与逻辑论证的意识和能力.

(收稿日期:2018-12-26)

2018 年浙沪高考数学卷解析几何题小议

童永健
(上海市七宝中学,201101)

浙江和上海两地于 2017 年起实行新高考“3 + 3”的试验. 在此背景下,解析几何的大题作为具有一定思维量和运算量的载体之一,体现了让学生“能够做出”又“不能轻易做出”的考察能力的立意,已经连续两年作为两地压轴题. 有趣的是,从一种几何的解法入手,2018 年两地解析几何解答题之间还有某种联系,本文对此进行讨论.

题 1　(2018 年浙江卷 21 题)如图 1,已知点 P 是 y 轴左侧(不含 y 轴)一点,抛物线 $C:y^2=4x$ 上存在不同的两点 A,B 满足 PA、PB 的中点均在 C 上.

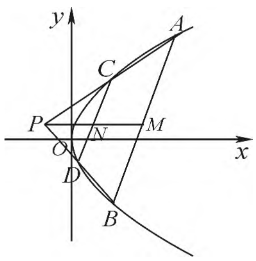

图 1

(1) 设 AB 的中点为 M,证明:PM 垂直于 y 轴;

(2) 若 P 是半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$ 上的动点,求三角形 PAB 面积的取值范围.

本题用解析法有多种解法,以下给出一种偏重几何意义的解法,与常规解析法相比,计算量相对小一点.

解　(1) 设 A,B,C,D 的坐标为 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$,$l_{AB}:x=my+n$,$l_{CD}:x=my+t$,$n,t>0$.

由 $\begin{cases}x=my+n,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4n=0$,根据韦达定理有

$$y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4n,x_1+x_2=4m^2+2n.$$

由 $\begin{cases}x=my+t,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4t=0$,根据韦达定理有

$$y_3+y_4=4m,y_3y_4=-4t,x_3+x_4=4m^2+2t.$$

这说明点 M 与点 N 的纵坐标相同,即 $MN\perp y$ 轴,又 CD 是三角形的中位线,N,M 分别是中位线和其对应底边上的中点,根据三角形的几何性质,P,N,M 三点共线,所以 $PM\perp y$ 轴.

(2) 由(1)知,$M(2m^2+n,2m)$,$N(2m^2+t,2m)$,

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|\\&=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\\&=4\sqrt{m^2+n}\cdot\sqrt{1+m^2},\\|CD|&=\sqrt{1+m^2}\,|y_3-y_4|\\&=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}\\&=4\sqrt{m^2+t}\cdot\sqrt{1+m^2},\end{aligned}$$

又 $|CD|=\frac{1}{2}|AB|$,所以 $n=3m^2+4t$,

直线 AB 与直线 CD 之间的距离

$$d=\frac{|n-t|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{3m^2+3t}{\sqrt{1+m^2}}.$$

因此

$$\begin{aligned}S_{\triangle APB}&=\frac{4}{3}S_{\text{梯形}ABCD}\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}d\cdot(|AB|+|CD|)\\&=2d\cdot|CD|=6\sqrt{2}\cdot(2m^2+2t)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

又 $|PN|=|MN|$,可得 $P(-m^2-2t,2m)$,因为 P 在半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上,所以 $(-m^2-2t)^2+m^2=1$,$2t=\sqrt{1-m^2}-m^2$,$m\in[-1,1]$,

$$S_{\triangle APB}=6\sqrt{2}\cdot(m^2+\sqrt{1-m^2})^{\frac{3}{2}}.$$

令 $t=\sqrt{1-m^2}$,则 $t\in[0,1]$,$S_{\triangle APB}=6\sqrt{2}\cdot(-t^2+t+1)^{\frac{3}{2}}=6\sqrt{2}[\frac{5}{4}-(t-\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}$,由此可得

$$S_{\triangle APB}\in[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}].$$

评注　在第(1)问中,巧妙地运用了韦达定理“设而不求”及图形的几何性质,运算量较小. 在第

(2) 问中,注意到 P,A,B 是将一个上底长是下底长一半的梯形内接到抛物线内,利用梯形两条底边长度的关系,寻找到 AB,CD 两条直线中参数的关系,利用梯形底边平行,根据直线间的距离建立面积的表达式,进而求范围.

受此启示,我们想到利用抛物线的内接梯形,可反向构造出 P 点. 比如,在抛物线内任取一段弦 AB,作 AB 的平行线与抛物线相交于 CD,注意到 $|CD|\in[0,+\infty)$,所以总能找到一条直线 CD,使得 $|CD|=\frac{1}{2}|AB|$,分别连接 AD 和 BC,两条直线的交点即为 P.

那么,对于对边平行的四边形,要求特定对边长的问题,也可按照上述思路判断讨论.

2018 年上海高考解析几何题的第(3) 问也是一个"类内接矩形" 的问题,参考上述思路可得到一个解题方法.

题 2 (2018 年上海卷 20 题) 设常数 $t>2$,在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $F(2,0)$,直线 $l:x=t$,曲线 $\Gamma:y^2=8x(0\leqslant x\leqslant t,y\geqslant 0)$,$l$ 与 x 轴交于点 A,与 Γ 交于点 B,P,Q 分别是曲线 Γ 和线段 AB 上的动点.

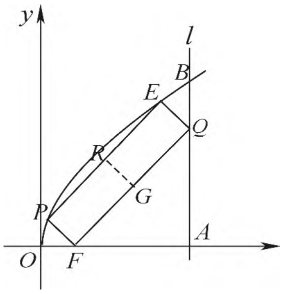

图 2

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t=3$,$|FQ|=2$,线段 OQ 的中点在直线 FP 上,求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t=8$,是否存在以 FP,FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$,使得点 E 在 Γ 上 ?若存在,求点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

分析 只考虑第(3) 小题,对于定长 $|FQ|$,作 FQ 的平行线 PE,与抛物线相交于点 P 和 E,总能找到这样一条平行直线,使得 $|PE|=|FQ|$,这样就构造了平行四边形 $FPEQ$,接下来只需建立关系,使得平行四边形有一个角是直角,即可得到矩形 $FPEQ$.

解 设 $l_{FQ}:x=my+2(m>1)$,则 $Q(8,\frac{6}{m})$,设 $l_{PE}:x=my+n$,与 $y^2=8x$ 联立得

$$y^2-8my-8n=0.\qquad(*)$$

因为 $|PE|=\sqrt{64m^2+32n}\cdot\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2m^2+n}\cdot\sqrt{1+m^2}$,$|FQ|=\sqrt{36+\frac{36}{m^2}}$,由 $|FQ|=|PE|$,化简后得 $n=\frac{9}{8m^2}-2m^2$,故

$$l_{PE}:x=my+\frac{9}{8m^2}-2m^2.$$

由于线段 PE 的中点 $R(2m^2+\frac{9}{8m^2},4m)$,又线段 FQ 的中点 $G(5,\frac{3}{m})$,注意到 $RG\,/\!/\,PF$,有 $k_{RG}=\frac{4m-\frac{3}{m}}{2m^2+\frac{9}{8m^2}-5}=-m$,解得 $m^2=\frac{5}{4}$,$m=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$n=-\frac{8}{5}$,代入(*) 解得 $P(\frac{2}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$.

评注 本题中 FQ 只是抛物线弦的一部分,利用中点 G 与弦 FE 的中点连线与弦 FE 垂直,得到矩形对边中点连线与所在边斜率乘积为 -1,建立方程,利用韦达定理,极大地简化了计算过程.

对浙江卷第(2) 题可纵向推广:把原题中的半椭圆改为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x<0)$,抛物线改为抛物线 $y^2=2px$,则 $S_{\triangle APB}$ 的取值范围的问题即可扩展为一个二次函数区间上的最值问题,有以下结论:

① 当 $pa>b^2$ 时,$S_{\triangle APB}\in(\frac{3\sqrt{2}\cdot b^3}{2p},6a\sqrt{ap}]$;

② 当 $-\frac{pa^2}{b^2}\in[-a,-\frac{a}{2})$,$S_{\triangle APB}\in(\frac{3\sqrt{2}\cdot b^3}{2p},\frac{3\sqrt{2}}{2p}(b^2+\frac{p^2a^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}]$;

③ 当 $-\frac{pa^2}{b^2}\in[-\frac{a}{2},0)$,$S_{\triangle APB}\in[6a\sqrt{ap},\frac{3\sqrt{2}}{2p}(b^2+\frac{p^2a^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}]$.

对类似这样的问题,相信还有许多值得探讨的内容有待挖掘. 对解析几何大题,若能回归几何本身,结合图形的变化,使得代数过程充分"动" 起来,以更大的思维量换取较少的运算量,充分体现数形结合,定会时常有不一样的发现.

(收稿日期:2019-01-04)

也谈一组向量问题的解法

邵明宪

(河南省方城县教研室，473200)

文[1]给出了在斜坐标系下一组向量问题的解法，读后深受启发之余，笔者从方法服从题目、力求简单自然的视角探究发现，这组问题中具有两个向量长度、夹角均已知的条件时，用直角坐标法；否则，用基向量法. 可使问题方便解决.

例 1 (文[1]例 1)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$AB=3$，$AC=2$，若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$，且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则 λ 的值为________.

解 如图 1，以 A 为原点，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 xAy，则由题意，$B(3,0)$，$C(1,\sqrt{3})$，$D(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$，从而

$$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\lambda-3,\sqrt{3}\lambda),$$

$$\overrightarrow{AD}=(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}),$$

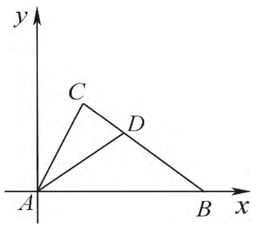

图 1

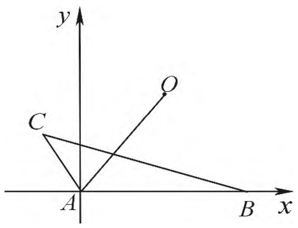

图 2

故由 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$ 可得

$$\frac{5}{3}(\lambda-3)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\lambda=-4,$$

解得 $\lambda=\frac{3}{11}$.

例 2 (文[1]例 5)已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{7}$，O 是 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$________.

解 由题意及余弦定理，$\angle A=120^\circ$. 建立以 A 为原点，直线 AB 为 x 轴的平面直角坐标系(如图 2)，则 $B(2,0)$，$C(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$O(1,\frac{2\sqrt{3}}{3})$，故由 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ 可得 $(1,\frac{2\sqrt{3}}{3})=(2\lambda-\frac{1}{2}\mu,\frac{\sqrt{3}}{2}\mu)$，所以

$$\begin{cases}2\lambda-\frac{1}{2}\mu=1,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\mu=\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}\lambda=\frac{5}{6},\\ \mu=\frac{4}{3}.\end{cases}$$

从而 $\lambda+\mu=\frac{13}{6}$.

例 3 (文[1]例 6)在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB/\!/CD$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60^\circ$，动点 E、F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为________.

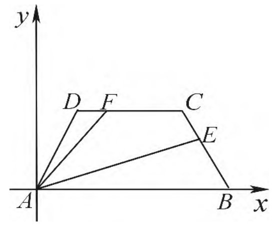

图 3

解 建立如图 3 所示的平面直角坐标系 xAy，则由题意，$B(2,0)$，$D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$C(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，从而

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}$$

$$=(2-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda),$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{9\lambda},\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(2-\frac{\lambda}{2})(\frac{1}{2}+\frac{1}{9\lambda})+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{2}{9\lambda}+\frac{\lambda}{2}+\frac{17}{18}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{9\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}}+\frac{17}{18}=\frac{29}{18},$$

等号成立当且仅当 $\frac{2}{9\lambda}=\frac{\lambda}{2}$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.

因此，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为 $\frac{29}{18}$.

例 4 (文[1]例 7)在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，AB、AD 的长分别为 2 和 1. 若 M、N 分别

是 BC、CD 上的点，且 $|\overrightarrow{BM}|:|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CN}|:|\overrightarrow{CD}|$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是________.

简解　令 $|\overrightarrow{BM}|:|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CN}|:|\overrightarrow{CD}|=t$，易知 $t\in[0,1]$，同上例可求得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是$[2,5]$.

例 5　(文[1]例 9) 已知圆的半径为 1，半径 OA、OB 的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi$，φ 为常数)，点 C 为圆上的动点. 若$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$，则 $\alpha+\beta$ 的最大值是________.

解　以 O 为原点，射线 OA 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系 xOy(图略)，则 $A(1,0)$，$B(\cos\varphi,\sin\varphi)$.

设 $C(\cos\theta,\sin\theta)$，则由$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 可得 $(\cos\theta,\sin\theta)=(\alpha+\beta\cos\varphi,\beta\sin\varphi)$，所以 $\alpha=\cos\theta-\cot\varphi\sin\theta$，$\beta=\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi}$，故由柯西不等式可得

$$(\alpha+\beta)^2=(\cos\theta-\cot\varphi\sin\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\varphi})^2$$

$$=(\cos\theta+\tan\frac{\varphi}{2}\sin\theta)^2$$

$$\leqslant(1^2+\tan^2\frac{\varphi}{2})(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=\sec^2\frac{\varphi}{2},$$

易知 $\theta=\dfrac{\varphi}{2}$ 时等号成立.

从而 $\alpha+\beta\leqslant\sec\dfrac{\varphi}{2}$，即 $\alpha+\beta$ 的最大值是 $\sec\dfrac{\varphi}{2}$.

例 6　(文[1]例 10) 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A、B 满足 $|OA|=|OB|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集$\{P\mid\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$ 所表示的区域的面积是　(　　)

(A) $2\sqrt{2}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.

(C) $4\sqrt{2}$.　　(D) $4\sqrt{3}$.

解　由题意，不妨设 $A(1,\sqrt{3})$，$B(-1,\sqrt{3})$，$P(x,y)$.

则由$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{\sqrt{3}x+y}{2\sqrt{3}}$，$\mu=\dfrac{y-\sqrt{3}x}{2\sqrt{3}}$，从而

$$|\lambda|+|\mu|\leqslant1$$

$$\Leftrightarrow|\sqrt{3}x+y|+|\sqrt{3}x-y|\leqslant2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow3x^2+y^2+|3x^2-y^2|\leqslant6$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2\geqslant y^2,\\x^2\leqslant1\end{cases}\text{或}\begin{cases}3x^2\leqslant y^2,\\y^2\leqslant3.\end{cases}$$

当$\begin{cases}3x^2\geqslant y^2,\\x^2\leqslant1\end{cases}$时，点集所表示的区域如图 4；

当$\begin{cases}3x^2\leqslant y^2,\\y^2\leqslant3\end{cases}$时，点集所表示的区域如图 5.

可求得点集$\{P\mid\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$ 所表示的区域的面积为 $4\sqrt{3}$，故选(D).

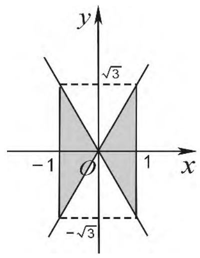

图 4

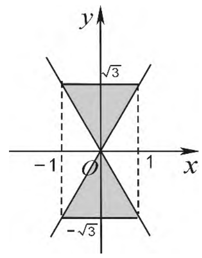

图 5

评注　直角坐标法是学生最容易掌握的基本方法. 在有公共起点的两个向量的长度、夹角均已知的条件下，若没有给定直角坐标系，则通常以其中一个向量所在直线为一轴建立平面直角坐标系解题(例 1 ～ 例 5)，若给定了直角坐标系，为简便解题，需考虑恰当选取符合题意的这两个向量(例 6).

例 7　(文[1]例 2) 如图 6，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=5$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.

解　以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为一组基底，则

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

从而$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB})$

$$=\overrightarrow{AD}^2-\frac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

又已知 $AB=8$，$AD=5$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，代入可求得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=22$.

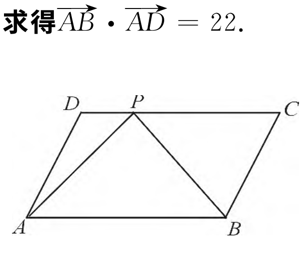

图 6

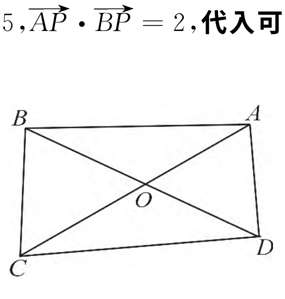

图 7

例 8　(文[1]例 4) 如图 7，四边形 $ABCD$ 中，$AC=l_1$，$BD=l_2$，则$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})=$________.

解　以$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$ 为一组基底，则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$$
$$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD},$$
$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD},$$

从而$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2=l_1^2-l_2^2$.

例 9　(文[1]例 8)如图 8,$\triangle ABC$ 中,点 O 为 BC 的中点,过 O 的直线分别交 AB、AC 于不同的两点 M、N. 若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n$ 的值为________.

解　以$\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AN}$ 为一组基底,则由题意,

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}.$$

设$\overrightarrow{MO}=\lambda\overrightarrow{ON}$,则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=(1+\lambda)\cdot\overrightarrow{ON}$,又$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$,所以$\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(1+\lambda)\cdot\overrightarrow{ON}$,得$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})$,从而

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{AN}-\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AN}.$$

故$\dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{1+\lambda}$,$\dfrac{n}{2}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$,于是$\dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{1+\lambda}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}=1$,即 $m+n=2$.

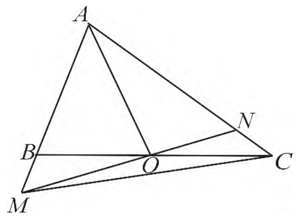

图 8

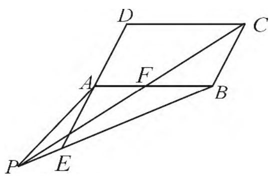

图 9

例 10　(文[1]例 12)如图 9,在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E、F 分别在直线 AB、AD 上,且 $AE:BE=1:2$,$AF:FD=2:3$,又 $P=DE\cap CF$,若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$,则 $\lambda+\mu=$ ________.

解　以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ 为一组基底,则由题意,$\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})$$
$$=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}),$$

从而$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

又$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$,故$\lambda=-\dfrac{3}{2}$,$\mu=-\dfrac{1}{2}$,于是 $\lambda+\mu=-2$.

例 11　(文[1]例 11)在$\triangle ABC$ 中,点 D、E 分别在 AB、BC 上,满足$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$.,设 $P=AE\cap CD$,若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则$(\lambda,\mu)=$　　(　　)

(A)$(\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{7})$.　　(B)$(\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{7})$.

(C)$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$.　　(D)$(\dfrac{4}{15},\dfrac{8}{15})$.

解　如图 10,以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 为一组基底.

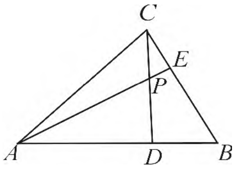

图 10

令$\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{DP}$,由$\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,得$\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3(1+k)}\overrightarrow{AB}$,从而

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\frac{2k}{3(1+k)}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC}.$$

又$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,故$\lambda=\dfrac{2k}{3(1+k)}$,$\mu=\dfrac{1}{1+k}$,从而

$$\frac{3}{2}\lambda+\mu=1.\qquad①$$

又$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AP}$ 共线,故$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AP}(0<t<1)$,且

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

所以$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=t(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC})$,故$\lambda=\dfrac{1}{3t}$,$\mu=\dfrac{2}{3t}$,从而

$$\mu=2\lambda.\qquad②$$

由①、②,得$\lambda=\dfrac{2}{7}$,$\mu=\dfrac{4}{7}$,即$(\lambda,\mu)=(\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{7})$.

评注　用基向量法和坐标法解同一题时,虽然基向量法常不如坐标法简便,但其具有一般性. 用基向量法解题的关键是利用向量的有关运算和性质,将相关向量用基底表示.

以上表明,根据条件分别选用直角坐标法和基向量法这两种基本方法解题,目标明确,入手容易,操作性强,熟练掌握,可取得理想效果.

参考文献:

[1] 张丽娟,张国治,程似锦. 斜坐标系及其应用[J]. 数学教学,2018(4):29-34.

(收稿日期:2018—12—24)

利用图象法分析一阶递推数列的有界性

张莘钿　胡典顺

(华中师范大学数学与统计学学院，430079)

1. 引言

数列是定义在正整数集或正整数集子集上的特殊函数，是高考以及自主招生考试中重点考查的内容. 其中，有界性作为数列的一个基本性质，在分析数列、解决数列的各类问题中起到了关键的作用.

本文以函数图象为切入点，基于提升学生的直观想象素养，通过观察数列递推函数的图象特征，分析了一类数列有界的成因及主要特点，提出了数列有界性的正方形有界命题，为解决或命制数列有界性问题提供了方向和思路.

2. 实例与探索

2.1　引例

例 1　(2005 年江西高考试题) 已知数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n)$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(1) 证明：$a_n<a_{n+1}<2, n\in\mathbf{N}_+$.

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

为了说明问题，我们只解决有界性，即证明 $0<a_n<2$.

在处理与自然数 n 有关的证明题时，我们经常采用数学归纳法.

当 $k=1$ 时，$a_1=1$，因此 $0<a_1<2$ 成立；

假设当 $k=n$ 时，有 $0<a_n<2$ 成立，则当 $k=n+1$ 时，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n)>0$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n)=2-\frac{1}{2}(a_n-2)^2<2$，即当 $k=n+1$ 时，命题 $0<a_{n+1}<2$ 成立.

故对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，$0<a_n<2$ 恒成立.

回顾：如果从函数的角度来看待数列，那么题中数列的递推函数为 $f(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$，在利用数学归纳法解答时，我们发现，$a_n<2$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，主要是由两个因素引起的：(1) 数列的首项 $a_1<2$；(2) 数列的递推函数 $f(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$. 那么，这个数列的上界 $M=2$ 又与什么因素有关？如果令 $f(x)=x$，可得函数 $f(x)$ 的不动点 $x=0$ 和 $x=2$，不难发现 $M=2$ 恰好是题中数列的一个上界，$m=0$ 也是题中数列的一个下界，因此这个数列的上下界很有可能与其递推函数 $f(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$ 的不动点有关.

2.2　一阶数列递推图及正方形区域

对于递推函数 $y=f(x)$，点$(a_1, f(a_1))$在函数图象上，且这个点的纵坐标就是 $f(a_1)=a_2$，再以 a_2 为横坐标，得到点(a_2, a_3)也在函数图象上. 以此类推，可以在图象上作出点$(a_1,a_2),(a_2,a_3),\cdots,(a_n,a_{n+1})$，这些点的横坐标分别是 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，纵坐标分别是 $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_{n+1},\cdots$，即对于递推函数 $y=f(x)$，$\{a_n\}$既作为 $y=f(x)$ 的定义域，又作为 $y=f(x)$ 的值域，称该图为一阶数列递推图. 如果在纵坐标中加入首项，将所有的点用一个区域锁定住，则锁定的区域恰好为一个正方形区域，如图 1 所示；如果纵坐标中不加入首项，那么锁定的区域恰好为一个长方形区域，如图 2 所示：

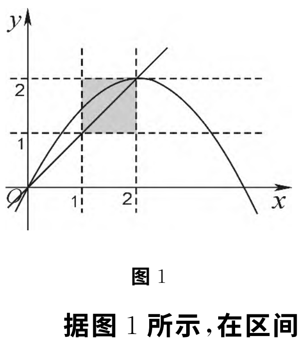

图 1

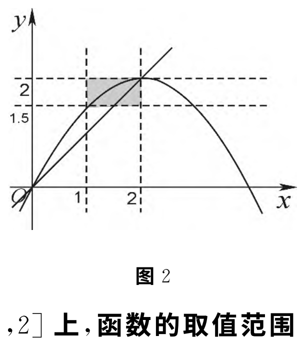

图 2

据图 1 所示，在区间$[1,2]$上，函数的取值范围 $B=[\frac{3}{2},2]\subseteq[1,2]$，因此函数在区间$[1,2]$上的图

基金项目：中央高校基本科研业务费专项资金资助 —— 基于学习分析技术的高中数学核心素养评价模型研究(CCNU19TS029)

象完全包含在一个正方形区域内,只要数列的首项落在了区间$[1,2]$上,则首项之后所有的项都会落在区间$[1,2]$上,即所有的点$(a_n,a_{n+1})(n\in\mathbf{N}_+)$都会被限制在这个正方形区域内,由于正方形区域是有边界的,因此数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}_+)$自然是有界的,且这个边界完全被正方形区域顶点的坐标所控制,这样,通过一阶递推图就可以较为清楚地找到数列的上界与下界.

需要注意的是,这个界的取值不一定精确,例如,在由点$(0,0)$与点$(2,2)$为对角线张成的正方形区域内,函数的取值范围$B=[0,2]$与自变量x的范围$[0,2]$相同,这时得到的结论是$0\leqslant a_n\leqslant 2(n\in\mathbf{N}_+)$,这时下界就显得不够精确了.

3. 正方形区域有界命题

3.1　命题及其证明

受例 1 以及从中抽象出的模型正方形区域的引导和启发,经过抽象、归纳、假设、验证的过程,最终得到了如下命题:

命题　若递推函数$f(x)$是定义在I上的连续函数,若存在区间$[a,b]\subseteq I$满足$f(x)$在区间$[a,b]$上的值域$B\subseteq[a,b]$,且$a_1\in[a,b]$,则由递推函数$f(x)$生成的数列$\begin{cases}a_1=a,\\a_{n+1}=f(a_n),n\in\mathbf{N}_+\end{cases}$一定有界,并且$a\leqslant a_n\leqslant b,n\in\mathbf{N}_+$.

证明　采用数学归纳法证明有界性.

当$k=1$时,因为$a_1=a$,所以$a\leqslant a_1\leqslant b$成立;

假设当$k=n$时,有$a\leqslant a_n\leqslant b$成立,则当$k=n+1$时,由于$f(x)$在区间$[a,b]$上的值域$B\subseteq[a,b]$,故$a_{n+1}=f(a_n)\in B\subseteq[a,b]$成立,即当$k=n+1$时,命题成立.

由数学归纳法知,对一切$n\in\mathbf{N}_+$,$a\leqslant a_n\leqslant b$恒成立.

需要注意的是,若将命题中所有的闭区间$[a,b]$改成开区间(a,b),命题仍然成立,这时得到的结论是$a<a_n<b,n\in\mathbf{N}_+$.

3.2　命题的使用与正方形区域的寻找

上述命题为我们初步判断一个数列是否有界提供了一个充分的条件,并且对数列的界有了一个粗略的估计.在具体使用这个命题的过程中,可以从递推函数图象上找到一个有界的正方形区域$\{(x,y)\mid x,y\in[a,b]\}$包含$\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in B\}$($B$为递推函数$f(x)$的值域),这样就能找到一个使得数列有界的区域.由正方形区域$\{(x,y)\mid x,y\in[a,b]\}$容易得出,它的对角线一定在直线$y=x$上,且正方形区域中的某些顶点极有可能是递推函数$f(x)$的不动点.

3.3　证明数列有界的一般过程与方法

正方形有界区域在我们理解、分析数列的有界性方面有便捷的地方,但对于数列有界性的证明题,我们希望找到一种写法,而这种写法就是证明命题 1 时用到的数学归纳法.因此,在处理数列有界性的证明题时,我们有一般步骤如下:

(1) 确定递推数列$a_{n+1}=f(a_n),n\in\mathbf{N}_+$的递推函数$f(x)$,作出一阶递推图,再根据递推函数及其不动点找到满足命题的正方形区域;

(2) 说明在正方形边界$[a,b]$上,有$f(x)$的值域$B\subseteq[a,b]$;

(3) 利用数学归纳法说明数列$\{a_n\}$的有界性.

例 2　(2006 年湖南高考理科数学试题)已知函数$f(x)=x-\sin x$,数列$\{a_n\}$满足:$0<a_1<1$,$a_{n+1}=f(a_n)$,$n=1,2,3,\cdots$.证明:(1)$0<a_{n+1}<a_n<1$;(2)$a_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3$.

分析　为了说明问题,我们只解决有界性.题设数列所对应的递推函数为$f(x)=x-\sin x$,令$f(x)=x$,则$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,取定区间$(0,1)$,作出正方形区域$\{(x,y)\mid x,y\in(0,1)\}$,如图 3.

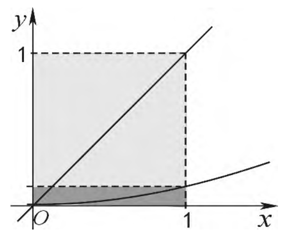

图 3

当$x\in(0,1)$时,$f(x)\in(0,1-\sin 1)\subseteq(0,1)$,则项$a_1\in(0,1)$.

根据上述命题可得,数列$\{a_n\},n\in\mathbf{N}_+$有界,且$a_n\in(0,1)$.

接下来开始完成证明过程:

$f(x)=x-\sin x$,$f'(x)=1-\cos x>0$在$x\in(0,1)$上恒成立,故$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增.

且当$x\in[0,1]$时,

$$\max_{x\in[0,1]}f(x)=f(1)=1-\sin 1<1,$$

$$\min_{x\in[0,1]}f(x)=f(0)=0.$$

因此,当$x\in(0,1)$时,$f(x)\in(0,1)$.

当 $k=1$ 时,$0<a_1<1$ 成立;

假设当 $k=n$ 时,$0<a_n<1$ 成立,则当 $k=n+1$ 时,$a_{n+1}=f(a_n)\in(0,1)$. 即当 $k=n+1$ 时命题成立.

由数学归纳法知,$0<a_n<1$,$n\in\mathbf{N}_+$.

还要说明的一点是,有时试题中要证明数列只有一边有边界,例如证明 $a_n>a$(a 为常数)时,可能会出现当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 的值也趋于正无穷的情形,这时要寻找的正方形区域无能是无界的,即 $\{(x,y)\mid x>a,y>a\}$,只要任给一个有界的正方形区域 $\{(x,y)\mid x,y\in(a,b)\}$,都满足上述命题的条件,正方形区域就依旧成立,只不过有一边的边界是趋于无穷的,这时的正方形区域 $\{(x,y)\mid x>a,y>a\}$ 称为广义正方形区域.

4. 正方形有界命题的必要性与优越性

正方形有界命题虽然能帮助我们理解数列有界性的成因,但似乎不介绍正方形有界命题,根据数学归纳法也能解决上述问题,这是因为上述模型更加特殊化,我们可以分析清楚数列的变化情况,并且证明题也没有涉及到数列边界的寻找,接下来我们利用正方形有界命题解决一个仅靠数学归纳法不能完全解决的问题,以此来说明正方形有界命题的必要性与优越性.

例 3　(2018 学年第一学期浙江省 9+1 高中联盟期中考试高三数学试题)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2(|a_n|-1)$,$n\in\mathbf{N}_+$,若存在常数 $M>0$,使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}_+$,恒有 $|a_n|\leqslant M$,则 a_1 的取值范围是________.

分析　题设对应的递推函数为 $f(x)=2|x|-2$,令 $f(x)=x$,解得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{2}{3}$,取定区间 $[-2,2]$,得到正方形区域 $\{(x,y)\mid x,y\in[-2,2]\}$,如图 4.

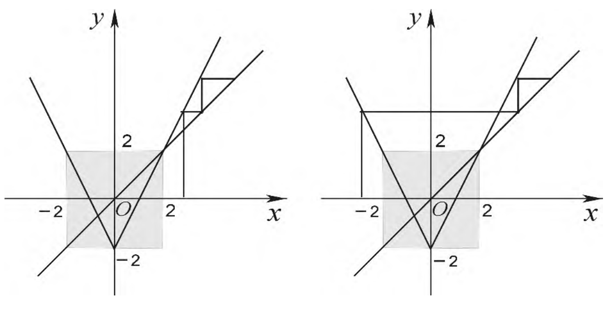

图 4

当 $x\in[-2,2]$ 时,可知 $f(x)=2|x|-2\in[-2,2]$.

若首项 $a_1\in[-2,2]$,根据命题可得,数列 $\{a_n\}$ 有界,且 $a_n\in[-2,2]$,$n\in\mathbf{N}_+$.

当 $|a_1|>2$ 时,根据递推图中数列的变化趋势可以直观得出,数列最终发散,因此,当 $|a_1|>2$ 时都不成立.

综上所述,a_1 的取值范围是 $[-2,2]$.

回顾:在这个问题中,求出各类情况下数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是非常困难的,数列的界 M 也不好寻找. 并且,当 $a_1\in[-2,2]$ 时,根据尝试,数列 $\{a_n\}$ 的运动不具备单调性,呈现杂乱无章的状态,实际上这是"混沌"现象,对于高中阶段而言,是无法作出分析的,因此也无法分析出数列的有界性,但通过正方形有界定理很好地回避了这个问题,可以完全不用讨论"混沌"的性态,直接说明了数列有界. 同时这也为我们命题提供了一些方向,可以通过正方形有界命题构造出一些递推关系复杂,无规律的数列试题,考查学生的直观想象素养以及数形结合等数学思想方法.

5. 小结

本文借助函数的观点,分析了数列有界时一阶递推图的图象特征,从中抽象出了正方形区域这个数学模型,并在此基础上介绍了解决数列有界性的正方形有界命题,为解决或命制一类有界性试题提供了一定的方法与思路,也为在教学中培养学生直观想象素养提供了一个合理有效的素材,但对于变系数的一阶递推问题没有涉及,这也是今后进一步深入讨论与研究的方向.

参考文献:

[1] 沈新权,曹鸿德. 一阶递推数列的有界性与单调性[J]. 数学通报,2013(7).

[2] 孙玉泉,杨小远,李尚志. 从数列到混沌[J]. 高等数学研究,2012(6).

[3] 范广法. 例说首项对数列性质的影响[J]. 数理天地(高中版),2016(5).

[4] 张奠宙,顾鹤荣. 不动点定理[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,1995.

(收稿日期:2018—12—13)

椭圆的切线性质再探

吴荣华

(福建省莆田第五中学，351100)

文[1] 由两个结论得到了椭圆切线的四条性质，读后颇受启发，但觉意犹未尽. 经探究发现，椭圆的切线还有许多美妙的性质，值得我们去挖掘和深究. 本文拟在文[1] 的基础上，再给出椭圆切线的另一些性质，意在抛砖引玉，共同赏析.

先把文[1] 的这两个结论及四条性质抄录如下：

结论 1　直线 $Ax+By+m=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相切的充要条件是 $a^2A^2+b^2B^2=m^2$.

结论 2　若点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，则 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 表示经过点 P 的切线.

性质 1　两焦点到切线的距离之积为定值.

性质 2　焦点在切线上的投影的轨迹是一个圆.

性质 3　切线与过切点的焦半径成等角.

性质 4　互相垂直的两切线交点轨迹是一个圆.

下面再给出椭圆切线的另六个性质. 上接文[1] 的性质 4，有

性质 5　切点与一个焦点关于该切点处的切线的对称点的连线过另一个焦点.

证明　设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上.

据结论 2，得椭圆在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

当 $x_0=0$ 或 $y_0=0$ 时，易知结论成立.

当 $x_0y_0\neq0$ 时，切线的斜率 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 设左焦点 $F_1(-c,0)$ 关于该切线的对称点为 Q，则直线 F_1Q 的方程为 $y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x+c)$. 与切线方程联立，得 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x+c)=1$，即 $b^2x_0x+a^2y_0\cdot\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x+c)-a^2b^2=0$，解得 $x=\frac{a^2b^4x_0-a^4cy_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}$，则点 Q 的横坐标和纵坐标分别为

$$x_Q=2x+c=2\cdot\frac{a^2b^4x_0-a^4cy_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}+c$$
$$=\frac{2a^2b^4x_0-a^4cy_0^2+b^4cx_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2},$$
$$y_Q=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(\frac{2a^2b^4x_0-a^4cy_0^2+b^4cx_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}+c)$$
$$=\frac{2a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\frac{a^2b^4x_0+b^4cx_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}$$
$$=\frac{2a^2b^2y_0(a^2+cx_0)}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}.$$

直线 QF_2 的斜率

$$k_{QF_2}=\frac{\frac{2a^2b^2y_0(a^2+cx_0)}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}{\frac{2a^2b^4x_0-a^4cy_0^2+b^4cx_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}-c}$$
$$=\frac{2a^2b^2y_0(a^2+cx_0)}{2a^2(b^4x_0-a^2cy_0^2)}=\frac{b^2y_0(a^2+cx_0)}{b^4x_0-a^2cy_0^2},$$

直线 QF_2 的方程为 $y=\frac{b^2y_0(a^2+cx_0)}{b^4x_0-a^2cy_0^2}(x-c)$.

当 $y=y_0(y_0\neq0)$ 时，由直线 QF_2 的方程得 $1=\frac{b^2(a^2+cx_0)}{b^4x_0-a^2cy_0^2}(x-c)$，则

$$x=\frac{b^4x_0-a^2cy_0^2}{b^2(a^2+cx_0)}+c$$
$$=\frac{b^4x_0-c\cdot a^2y_0^2+b^2c(a^2+cx_0)}{b^2(a^2+cx_0)}$$
$$=\frac{b^4x_0-c(a^2b^2-b^2x_0^2)+b^2c(a^2+cx_0)}{b^2(a^2+cx_0)}$$
$$=\frac{b^2x_0-a^2c+cx_0^2+a^2c+c^2x_0}{a^2+cx_0}$$
$$=\frac{(b^2+c^2)x_0+cx_0^2}{a^2+cx_0}=\frac{a^2x_0+cx_0^2}{a^2+cx_0}=x_0.$$

这就证明了：当 $x_0y_0\neq0$ 时，直线 QF_2 经过点 $P(x_0,y_0)$，即直线 PQ 恒过右焦点 F_2.

如果把左焦点 $F_1(-c,0)$ 与右焦点 $F_2(c,0)$ 对

换,结论仍然成立. 证毕.

由性质 5 可以得到文[1] 的性质 2、性质 3.

证明 不妨设这个焦点为 $F_1(-c,0)$,设焦点 $F_1(-c,0)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线 l 上的投影为 H,连接 F_1H 并延长到点Q,使得 $|HQ|=|HF_1|$,则点 F_1、Q 关于切线 l 对称,有 $|PQ|=|PF_1|$,$\angle F_1PH=\angle QPH$.

又据性质 5 得直线 PQ 恒过焦点 $F_2(c,0)$,则 $\angle QPH$ 的对顶角即为切线 l 与焦半径 PF_2 所成的角. 而 $\angle F_1PH$ 为切线l 与焦半径PF_1 所成的角. 从而可得切线与过切点的焦半径成等角. 文[1] 的性质 3 得证.

再由椭圆定义得 $|QF_2|=|PQ|+|PF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2a$, 进而易得 $|OH|=\frac{1}{2}|QF_2|=a$(其中 O 为坐标原点),从而可得点 H 的轨迹方程为$x^2+y^2=a^2$,即焦点在切线上的投影的轨迹是一个圆. 文[1] 的性质 2 得证.

性质 6 焦点对切点、该切点处的切线与该焦点相应准线的交点(当切线与准线有交点时) 张直角.

证明 据结论 2,得椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在切点 $P(x_0,y_0)$ 处切线的方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

易知 $y_0\neq 0$,否则切线与准线平行,无交点. 不妨设焦点、准线分别为 $F(c,0)$、$x=\frac{a^2}{c}$,联立切线与准线的方程,得 $\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c}+\frac{y_0y}{b^2}=1$,即 $y=\frac{b^2(c-x_0)}{cy_0}$.

可得切线与准线的交点 $Q(\frac{a^2}{c},\frac{b^2(c-x_0)}{cy_0})$. 则

$$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(x_0-c,y_0)\cdot(\frac{a^2}{c}-c,\frac{b^2(c-x_0)}{cy_0})$$
$$=\frac{(a^2-c^2)(x_0-c)}{c}+\frac{b^2(c-x_0)}{c}=0,$$

从而有 $FP\perp FQ$,即 $\angle PFQ$ 为直角,从而得:焦点对切点、该切点处的切线与该焦点相应准线的交点张直角.

特别地,当 $a^2=4,b^2=3$,准线为右准线时,有 $\angle PF_2Q$(其中 F_2 为右焦点$(1,0)$) 为直角,即以 PQ 为直径的圆恒过定点 $M(1,0)$. 这就是 2012 年全国高考福建卷理科试题题 19(Ⅱ) 的结论:

如图 1,椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F_1,右焦点为 F_2,离心率 $e=\frac{1}{2}$. 过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点,且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

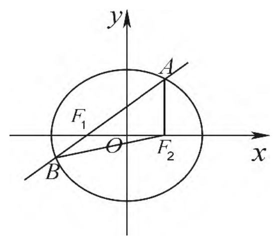

图 1

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程;(答案:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.)

(Ⅱ) 设动直线 l:$y=kx+n$ 与椭圆E 有且只有一个公共点 P,且与直线 $x=4$ 相交于点 Q. 试探究:在坐标平面内是否存在定点 M,使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M ?若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,说明理由.

性质 7 设 P 为椭圆上异于长轴端点A_1、A_2 的一点,直线 PA_1、PA_2 分别与椭圆外且垂直于长轴的直线 l 的交点所成的线段被点 P 处的切线平分.

证明 据结论 2,得椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 处切线的方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

设直线 l:$x=m(|m|>a)$,可得两直线的交点坐标为 $M(m,\frac{b^2(a^2-mx_0)}{a^2y_0})$.

设 $A_1(-a,0)$,$A_2(a,0)$,直线 PA_1,PA_2 的方程分别为 $y=\frac{y_0}{x_0+a}(x+a)$,$y=\frac{y_0}{x_0-a}(x-a)$,与直线 l 的交点分别为 $A(m,\frac{y_0}{x_0+a}(m+a))$,$B(m,\frac{y_0}{x_0-a}(m-a))$.

因为

$$\frac{y_0}{x_0+a}(m+a)+\frac{y_0}{x_0-a}(m-a)$$
$$=\frac{y_0[(m+a)(x_0-a)+(m-a)(x_0+a)]}{(x_0+a)(x_0-a)}$$
$$=\frac{2y_0(mx_0-a^2)}{x_0^2-a^2}=\frac{2y_0(mx_0-a^2)}{\frac{a^2b^2-a^2y_0^2}{b^2}-a^2}$$
$$=\frac{2b^2(a^2-mx_0)}{a^2y_0},$$

则线段 AB 的中点的坐标为 $\left(m, \frac{b^2(a^2-mx_0)}{a^2y_0}\right)$，恰与点 M 重合，故线段 AB 被点 P 处的切线平分. 证毕.

性质 8　设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦半径为 PF_1，PF_2，原点 O 到点 P 处的切线的距离为 d，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{a^2b^2}{d^2}$.

证明　设 $P(x_0,y_0)$，据结论 2，得点 $P(x_0,y_0)$ 处切线的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，则原点 O 到切线的距离

$$d=\frac{1}{\sqrt{(\frac{x_0}{a^2})^2+(\frac{y_0}{b^2})^2}}=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}},$$

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=e\left|x_0+\frac{a^2}{c}\right|\cdot e\left|x_0-\frac{a^2}{c}\right|$$

$$=e^2\left|x_0^2-(\frac{a^2}{c})^2\right|=\left|\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x_0^2-a^2\right|$$

$$=\frac{|a^2x_0^2-b^2x_0^2-a^2\cdot a^2|}{a^2}$$

$$=\frac{|-b^4x_0^2+a^2(b^2x_0^2-a^2b^2)|}{a^2b^2}$$

$$=\frac{|-b^4x_0^2+a^2\cdot(-a^2y_0^2)|}{a^2b^2}$$

$$=\frac{b^4x_0^2+a^4y_0^2}{a^2b^2},$$

由以上两式，可得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{a^2b^2}{d^2}$.

性质 9　设椭圆在点 P(异于左、右顶点) 处的切线为 l，焦点为 F_1、F_2，记直线 PF_1、PF_2、l 的斜率分别为 k_1、k_2、k，则 $\frac{1}{k_1k}+\frac{1}{k_2k}$ 为定值.

证明　据结论 2，得椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 处切线的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，其斜率 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

又 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_0+c}{y_0}+\frac{x_0-c}{y_0}=\frac{2x_0}{y_0}$，所以

$$\frac{1}{k_1k}+\frac{1}{k_2k}=\frac{2x_0}{y_0}\cdot\frac{1}{k}=\frac{2x_0}{y_0}\cdot\frac{1}{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=-\frac{2a^2}{b^2}.$$

即 $\frac{1}{k_1k}+\frac{1}{k_2k}$ 为定值.

性质 10　设 Q 为过椭圆中心且平行于点 P(异于左、右顶点) 处切线的直线 l 上一点，则直线 PQ 过焦点的充要条件是 $|PQ|$ 等于椭圆的长半轴的长.

证明　据结论 2，得椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 处切线的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，其斜率为 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，则直线 $l:y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x$.

设 $Q(a^2y_0t,-b^2x_0t)$，则直线 PQ 的方程为 $y-y_0=\frac{y_0+b^2x_0t}{x_0-a^2y_0t}(x-x_0)$，令 $y=0$，得直线 PQ 与 x 轴的交点的横坐标 $x=\frac{y_0(a^2y_0t-x_0)}{y_0+b^2x_0t}+x_0=\frac{(a^2y_0^2+b^2x_0^2)t}{y_0+b^2x_0t}=\frac{a^2b^2t}{y_0+b^2x_0t}$.

于是，

$$|PQ|=a$$

$$\Leftrightarrow(x_0-a^2y_0t)^2+(y_0+b^2x_0t)^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+(a^4y_0^2+b^4x_0^2)t^2-2(a^2-b^2)x_0y_0t=a^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2b^2-a^2y_0^2}{b^2}+y_0^2+(a^4\cdot\frac{a^2b^2-b^2x_0^2}{a^2}+b^4x_0^2)t^2-2c^2x_0y_0t=a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2[a^2(a^2b^2-b^2x_0^2)+b^4x_0^2]t^2+a^2b^2-a^2y_0^2+b^2y_0^2-2b^2c^2x_0y_0t=a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow b^4(a^4-c^2x_0^2)t^2-2b^2c^2x_0y_0t-c^2y_0^2=0$$

$$\Leftrightarrow[b^2(a^2+cx_0)t+cy_0]\cdot[b^2(a^2-cx_0)t-cy_0]=0$$

$$\Leftrightarrow b^2(a^2+cx_0)t+cy_0=0\text{ 或 }b^2(a^2-cx_0)t-cy_0=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2b^2t}{y_0+b^2x_0t}=-c\text{ 或 }\frac{a^2b^2t}{y_0+b^2x_0t}=c$$

$\Leftrightarrow$ 直线 PQ 过焦点 $(-c,0)$ 或 $(c,0)$.

以上给出了椭圆切线的另六条性质，展示了圆锥曲线的规律美、和谐美. 这些性质可为解决有关椭圆切线问题提供方便，同时也为有关椭圆的命题提供了理论依据和理论背景. 椭圆切线的这些性质，能否推广到双曲线、抛物线的情形？这一问题留给读者继续探究.

参考文献：

[1] 陈晓明. 椭圆的切线性质[J]. 数学通讯(上半月)，2018(6)：25-27.

(收稿日期：2018－12－24)

也谈椭圆的一个性质

敬加义
(四川省绵阳市开元中学,621000)

王翠华
(四川省德阳市旌阳区孟家中学,618017)

文[1]中,定理 1 给出了弦 AB 的端点分别是椭圆右顶点和上顶点、点 M 是弦 AB 的中点时两三角形的面积比,定理 2 指出了 M 是弦 AB 的内分点时两三角形面积比的取值范围.

笔者研究发现,当点 M 不在椭圆上时,分点 M 和弦 AB 具有任意性,此时弦 AB 与直径 CD 的两端点构成的 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 的面积比是一个仅与分点 M 的坐标有关的常数,并且这一结论可移植到双曲线中.

记 $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(a>b>0)$,$h(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$,则方程 $f(x,y)=1$ 表示椭圆:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$,方程 $h(x,y)=1$ 表示双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

定理 1 设 $M(x_0,y_0)$ 是不在椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的任意一点,过点 M 的直线与 Γ 交于 A、B 两点,直线 OM 交 Γ 于点 C、点 D(O 为坐标原点),弦 AB 与直径 CD 的两端点构成的 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 的面积分别是 S_1、S_2. 设 $k=\frac{\min\{S_1,S_2\}}{\max\{S_1,S_2\}}$,则有 $k=\left|\frac{\sqrt{f(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}\right|$.

证明 如图 1(两图分别表示分点 M 在 Γ 内部和外部两种情形).

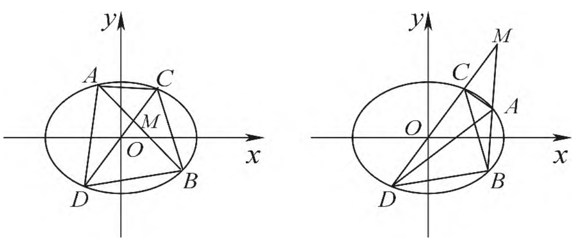

图 1

当 $x_0\neq 0$ 时,直线 CD 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数),代入椭圆 Γ 的方程并按参数 t 整理,得

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\cdot\sin\theta)t+(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)=0. \quad ①$$

由于 $x_0\neq 0$,所以 $\frac{y_0}{x_0}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,又由 $f(x_0,y_0)=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$ 可得 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2f(x_0,y_0)$,所以

$$b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta=\cos^2\theta\cdot[b^2+a^2\cdot(\frac{y_0}{x_0})^2]=\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot(b^2x_0^2+a^2y_0^2)=\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot a^2b^2f(x_0,y_0),$$

$$b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta=\cos\theta\cdot(b^2x_0+a^2y_0\cdot\frac{y_0}{x_0})=\frac{\cos\theta}{x_0}\cdot(b^2x_0^2+a^2y_0^2)=\frac{\cos\theta}{x_0}\cdot a^2b^2f(x_0,y_0),$$

$$b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=a^2b^2[f(x_0,y_0)-1],$$

代入 ① 式整理得

$$[\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot f(x_0,y_0)]t^2+[\frac{2\cos\theta}{x_0}\cdot f(x_0,y_0)]t+f(x_0,y_0)-1=0. \quad ②$$

设 t_1、t_2 是该二次方程的两实根,根据韦达定理,有

$$t_1+t_2=-\frac{\frac{2\cos\theta}{x_0}\cdot f(x_0,y_0)}{\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot f(x_0,y_0)}=-\frac{2x_0}{\cos\theta},$$

$$t_1t_2=\frac{f(x_0,y_0)-1}{\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot f(x_0,y_0)}=\frac{x_0^2[f(x_0,y_0)-1]}{\cos^2\theta f(x_0,y_0)},$$

所以

$$\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_1^2+t_2^2}{t_1t_2}=\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}-2$$

$$=\frac{(-\frac{2x_0}{\cos\theta})^2}{\frac{x_0^2[f(x_0,y_0)-1]}{\cos^2\theta f(x_0,y_0)}}-2$$

$$=\frac{4f(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)-1}-2=\frac{2[f(x_0,y_0)+1]}{f(x_0,y_0)-1}.$$

由参数 t 的几何意义知:当 $M(x_0,y_0)$ 在 Γ 内部时,t_1,t_2 异号且 $0<f(x_0,y_0)<1$;当 $M(x_0,y_0)$ 在 Γ 外部时,t_1,t_2 同号且 $f(x_0,y_0)>1$. 因此,当点 $M(x_0,y_0)$ 不在 Γ 上时,$\frac{t_1}{t_2}$ 与 $\frac{t_2}{t_1}$ 总有相同的符号,从而

$$k+\frac{1}{k}=\left|\frac{t_1}{t_2}\right|+\left|\frac{t_2}{t_1}\right|=\left|\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right|$$

$$=2\left|\frac{f(x_0,y_0)+1}{f(x_0,y_0)-1}\right|.$$

即得关于 k 的二次方程 $|f(x_0,y_0)-1|\cdot k^2-2|f(x_0,y_0)+1|\cdot k+|f(x_0,y_0)-1|=0$.

因为 $f(x_0,y_0)>0$,解此方程,得

$$k=\frac{2[f(x_0,y_0)+1]\pm 4\sqrt{f(x_0,y_0)}}{2|f(x_0,y_0)-1|}$$

$$=\frac{f(x_0,y_0)\pm 2\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}{|f(x_0,y_0)-1|}$$

$$=\frac{[\sqrt{f(x_0,y_0)}\pm 1]^2}{|[\sqrt{f(x_0,y_0)}+1][\sqrt{f(x_0,y_0)}-1]|},$$

所以

$$k_1=\left|\frac{\sqrt{f(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}\right|,$$

$$k_2=\left|\frac{\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}{\sqrt{f(x_0,y_0)}-1}\right|,$$

显然 $k_1\leqslant k_2$.

因为 $k=\frac{\min\{S_1,S_2\}}{\max\{S_1,S_2\}}$,所以

$$k=\left|\frac{\sqrt{f(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}\right|,$$

此时定理成立.

当 $x_0=0$ 时,直线 CD 的参数方程为 $\begin{cases}x=0,\\ y=y_0+t\end{cases}$ (t 为参数),代入椭圆 Γ 的方程并按参数 t 整理,得 $t^2+2y_0t+(y_0^2-b^2)=0$,解得 $t=-y_0\pm b$. 因而

$$k+\frac{1}{k}=\left|\frac{-y_0+b}{-y_0-b}+\frac{-y_0-b}{-y_0+b}\right|$$

$$=2\left|\frac{y_0^2+b^2}{y_0^2-b^2}\right|=2\left|\frac{\frac{y_0^2}{b^2}+1}{\frac{y_0^2}{b^2}-1}\right|$$

$$=2\left|\frac{f(0,y_0)+1}{f(0,y_0)-1}\right|,$$

解得

$$k_1=\left|\frac{\sqrt{f(0,y_0)}-1}{\sqrt{f(0,y_0)}+1}\right|,$$

$$k_2=\left|\frac{\sqrt{f(0,y_0)}+1}{\sqrt{f(0,y_0)}-1}\right|,$$

显然 $k_1\leqslant k_2$,从而 $k=\left|\frac{\sqrt{f(0,y_0)}-1}{\sqrt{f(0,y_0)}+1}\right|$,此时定理也成立.

综上所述,定理 1 为真.

评注　当 $A(a,0),B(0,b)$ 时,若 $M(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$,令 $x_0=\frac{a}{2},y_0=\frac{b}{2}$,则 $f(x_0,y_0)=\frac{1}{a^2}\cdot(\frac{a}{2})^2+\frac{1}{b^2}\cdot(\frac{b}{2})^2=\frac{1}{2}$,易得 $k=\left|\frac{\sqrt{f(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}\right|=(\sqrt{2}-1)^2$,即得文[1]中定理 1 的结论. 当 $A(a,0),B(0,b)$ 时,若 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}(\lambda>0)$,则 $M(\frac{\lambda a}{1+\lambda},\frac{b}{1+\lambda})$,令 $x_0=\frac{\lambda a}{1+\lambda},y_0=\frac{b}{1+\lambda}$,则 $f(x_0,y_0)=\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}$,易得 $k=\left|\frac{\sqrt{f(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{f(x_0,y_0)}+1}\right|=\left|\frac{\sqrt{\lambda^2+1}-(\lambda+1)}{\sqrt{\lambda^2+1}+(\lambda+1)}\right|$,运用文[1]的算法可得 $k\in(0,3-2\sqrt{2}]$,这就是文[1]中定理 2 的结论. 故本文定理 1 是文[1]中两个定理的推广.

定理 2　设 $M(x_0,y_0)$ 是不在双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的任意一点,过 M 的直线与 Γ 交于 A、B 两点,直线 OM 交 Γ 于点 C、点 D(O 为坐标原点),弦 AB 与直径 CD 的两端点构成的 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 的面积分别是 S_1、S_2. 设 $k=\frac{\min\{S_1,S_2\}}{\max\{S_1,S_2\}}$,则有 $k=\left|\frac{\sqrt{h(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{h(x_0,y_0)}+1}\right|$.

证明　如图 2(两图分别表示点 M 在 Γ 内部和外部两种情形)

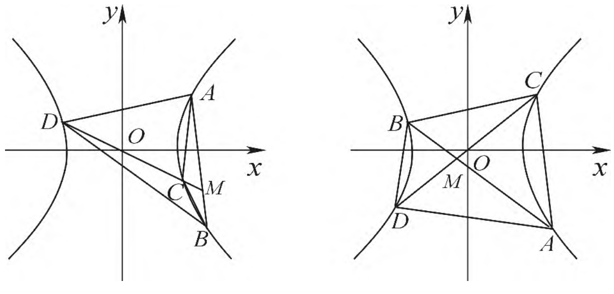

图 2

当 $x_0\neq 0$ 时,直线 CD 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数),代入双曲线 Γ 的方程并按参数 t 整理,得

$$(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\cdot\sin\theta)t+(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)=0. \quad ①$$

由于 $x_0\neq 0$,所以 $\frac{y_0}{x_0}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,又由 $h(x_0,y_0)=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$ 可得 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2h(x_0,y_0)$,所以

$$b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta=\cos^2\theta\cdot[b^2-a^2\cdot(\frac{y_0}{x_0})^2]=\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot(b^2x_0^2-a^2y_0^2)=\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot a^2b^2h(x_0,y_0),$$

$$b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=\cos\theta\cdot(b^2x_0-a^2y_0\cdot\frac{y_0}{x_0})=\frac{\cos\theta}{x_0}\cdot(b^2x_0^2-a^2y_0^2)=\frac{\cos\theta}{x_0}\cdot a^2b^2h(x_0,y_0),$$

$$b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2=a^2b^2[h(x_0,y_0)-1],$$

代入 ① 式整理得

$$[\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot h(x_0,y_0)]t^2+[\frac{2\cos\theta}{x_0}\cdot h(x_0,y_0)]t+h(x_0,y_0)-1=0. \quad ②$$

显然有 $b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta\neq 0$,即有 $\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot h(x_0,y_0)\neq 0$,由直线 CD 与 Γ 有两个不同交点知该方程的判别式 $\Delta=[\frac{2\cos\theta}{x_0}\cdot h(x_0,y_0)]^2-4[\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot h(x_0,y_0)]\cdot[h(x_0,y_0)-1]=\frac{4\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot h(x_0,y_0)>0$,所以 $h(x_0,y_0)>0$.

设 t_1、t_2 是二次方程 ② 的两实根,根据韦达定理,有

$$t_1+t_2=-\frac{\frac{2\cos\theta}{x_0}\cdot h(x_0,y_0)}{\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot h(x_0,y_0)}=-\frac{2x_0}{\cos\theta},$$

$$t_1t_2=\frac{h(x_0,y_0)-1}{\frac{\cos^2\theta}{x_0^2}\cdot h(x_0,y_0)}=\frac{x_0^2[h(x_0,y_0)-1]}{\cos^2\theta h(x_0,y_0)},$$

所以

$$\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_1^2+t_2^2}{t_1t_2}=\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}-2$$

$$=\frac{(-\frac{2x_0}{\cos\theta})^2}{\frac{x_0^2[h(x_0,y_0)-1]}{\cos^2\theta h(x_0,y_0)}}-2$$

$$=\frac{4h(x_0,y_0)}{h(x_0,y_0)-1}-2$$

$$=\frac{2[h(x_0,y_0)+1]}{h(x_0,y_0)-1}.$$

由参数 t 的几何意义知:当 $M(x_0,y_0)$ 在 Γ 内部时,t_1,t_2 同号且 $h(x_0,y_0)>1$;当 $M(x_0,y_0)$ 在 Γ 外部时,t_1,t_2 异号且 $0<h(x_0,y_0)<1$. 因此,当点 $M(x_0,y_0)$ 不在 Γ 上时,$\frac{t_1}{t_2}$ 与 $\frac{t_2}{t_1}$ 总有相同的符号,从而

$$k+\frac{1}{k}=|\frac{t_1}{t_2}|+|\frac{t_2}{t_1}|=|\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}|$$

$$=2|\frac{h(x_0,y_0)+1}{h(x_0,y_0)-1}|.$$

即得关于 k 的二次方程 $|h(x_0,y_0)-1|\cdot k^2-2|h(x_0,y_0)+1|\cdot k+|h(x_0,y_0)-1|=0$.

因为 $h(x_0,y_0)>0$,解此方程,得

$$k=\frac{2[h(x_0,y_0)+1]\pm 4\sqrt{h(x_0,y_0)}}{2|h(x_0,y_0)-1|}$$

$$=\frac{h(x_0,y_0)\pm 2\sqrt{h(x_0,y_0)}+1}{|h(x_0,y_0)-1|}$$

$$=\frac{[\sqrt{h(x_0,y_0)}\pm 1]^2}{|(\sqrt{h(x_0,y_0)}+1)(\sqrt{h(x_0,y_0)}-1)|},$$

所以

$$k_1=|\frac{\sqrt{h(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{h(x_0,y_0)}+1}|,$$

$$k_2=|\frac{\sqrt{h(x_0,y_0)}+1}{\sqrt{h(x_0,y_0)}-1}|,$$

显然 $k_1\leqslant k_2$.

所以 $k=\frac{\min\{S_1,S_2\}}{\max\{S_1,S_2\}}=|\frac{\sqrt{h(x_0,y_0)}-1}{\sqrt{h(x_0,y_0)}+1}|$,此时定理成立.

当 $x_0=0$ 时,仿定理 1 的证法可证结论也成立.

故定理 2 为真.

参考文献:

[1] 黄海波. 椭圆的一个性质[J]. 数学通讯(下半月),2012(11).

(收稿日期:2018－12－19)

透析高考命题方向　优化三角复习方略

崔绪春
(江苏省清江中学，223001)

三角函数是中学数学中重要的初等函数之一，它的定义与性质有着十分鲜明的特征与规律性，它与代数、几何有着密切的联系，是研究其它部分知识的重要工具，在实际问题中也屡见不鲜，因此三角函数内容是每年高考必考的内容之一. 考查形式基本上是一个或两个小题、一个大题，考题多为容易题、基本题，难度不大；考查内容主要是对概念的理解和三角变换以及三角函数图象与性质(包括对定义的理解和运用，象限角及符号、运用诱导公式，同角三角函数关系式化简、求值等)，灵活运用上述概念和各种三角公式进行化简、求值、证明以及解三角形或结合三角函数的图象考查性质等是近些年来的热点. 下面就近几年来三角函数高考题进行归类解析，旨在透视高考题信息，把握高考命题方向，科学高效地搞好高考复习，并提出复习建议.

一、对考查内容及考题分布情况分析

年份	江苏卷题号	江苏卷考查内容	全国Ⅰ卷题号	全国Ⅰ卷考查内容
2014	第5、14、15题	三角函数图象与性质，解三角形，三角变换	第3、16、17题	三角函数值比大小，三角变换，三角函数图象与性质(单调性)
2015	第8、14、15题	正切和角，倍角公式，解三角形	第2、8、16题	三角函数图象与性质(零点、单调性)，解三角形(求角、周长)
2016	第9，14，15题	三角函数图象与性质、三角变换，解三角形、两角和与差公式	第12、17题	求值，三角函数图形与性质，考查运算能力
2017	第5，12，16题	诱导公式、三角恒等式变换，和与差角公式，三角函数图象与性质(最值)	第9、17题	三角函数图象的性质，解三角形(正弦余弦定理、周长)
2018	第7、13、16、18题	三角函数图象与性质，解三角形，三角变换，三角函数应用及有界性	第16、17题	三角函数应用及有界性最值，解三角形(正弦定理、余弦定理)

从表中可以得到这样的信息，三角函数是每年高考必考的知识点，主要考查以下六个方面内容：(1)三角函数的基本概念；(2)三角函数基本关系式及其诱导公式；(3)三角函数图象与性质；(4)三角变换；(5)解三角形；(6)三角函数综合应用问题. 并考查到数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象、数学建模等核心素养.

二、对三角函数高考题进行归类解析

1. 考查三角函数的定义与基本运算

例1　(2014年全国卷文科，2)已知角α的终边经过点$(-4,3)$，则$\cos\alpha=$　(　　)

(A) $\frac{4}{5}$.　　(B) $\frac{3}{5}$.

(C) $-\frac{3}{5}$.　　(D) $-\frac{4}{5}$.

分析　根据任意角三角函数定义，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}(r>0)$，易解出$\cos\alpha$.

解　因为角α的终边经过点$(-4,3)$，$r=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$，所以$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$，故选(D).

评注　(1)如果角α终边上一点坐标已经确定，那么根据任意角三角函数定义，角α的三角函数值也是确定的；另外，若角α已经给定，不论点P选择在角α的什么位置，角α的三角函数值也是确定的；

(2)本题表面上是给出点的坐标，实质上要求学生结合具体情境，抽象出利用三角函数定义解决问题，以此考查学生数学抽象核心素养.

例2　(2016年全国新课标Ⅲ卷理科，5)若$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则$\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$　(　　)

(A) $\frac{64}{25}$.　　(B) $\frac{48}{25}$.

(C) 1.　　(D) $\frac{16}{25}$.

分析　由$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，利用同角三角函数间的

基本关系式 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可以得到:$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$,$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 或 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$,再利用倍角公式可解决问题.

解法一　由 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ 及 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得到:$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$,$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 或 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$. 所以 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\dfrac{16}{25}+4\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{64}{25}$,故选(A).

解法二　$\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$

$$=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{1+4\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{1+4\times\dfrac{3}{4}}{1+(\dfrac{3}{4})^2}=\frac{64}{25}.$$

评注　(1) 因为 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$ 是个齐次式,可利用同角三角函数关系式 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,将关于 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的问题转化为已知的 $\tan\alpha$ 问题.

(2) 转化为已知 $\tan\alpha$ 的问题常见形式有以下几种:① $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$,② $\dfrac{\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$,③$\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$,④ $\dfrac{\sin^2\alpha+3}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$,⑤ $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}$,解决这类问题的基本方法就是转化为 $\tan\alpha$,其本质问题是转化为齐次式,然后分子、分母同除以 $\cos\alpha$ 的相应次数,从而使学生会一题到会解一类题,若没掌握算理、算法,往往事倍功半.

(3) 数学运算核心素养的训练,功夫要落实在平时,“会做做不对”是学生的常见毛病,其本质上就是数学运算核心素养不过硬的表现,这些学生通常不动脑筋“死算”、“瞎算”,高考要求学生会根据所给问题,明确运算对象,分析运算条件,把握运算方法,设计运算程序,只有这样,才能“快速、准确”获取运算结果.

2. 考查三角函数的图象及其图象变换规律

例 3　(2016 年全国新课标 Ⅲ 卷理科,14) 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移________个单位长度得到.

分析　先要将函数化为标准型:$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$,然后根据图象特征进行平移.

解　因为 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$,

$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$

$=2\sin[(x+\dfrac{\pi}{3})-\dfrac{2\pi}{3}]$,

所以,函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到.

评注　(1) 三角函数图象的平移变换问题要三个关注:一要关注 ω 的系数;二是关注“左加右减”原则;三要关注变换方向,即从谁平移到谁.

(2) $\sin\alpha=\sin\beta\Rightarrow\alpha=\beta+2k\pi$ 或 $\alpha=\pi-\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 从三角函数线上容易解决问题,同理:$\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta+2k\pi$ 或 $\alpha=-\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 学生容易漏解.

3. 考查三角函数的性质

三角函数的性质是高考的重要考点,主要涉及到:三角函数的单调性和单调区间,三角函数的周期性,三角函数的值域和最值,等等.

例 4　(2018 年全国 Ⅱ 卷,10) 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数,则 a 的最大值是　(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$.

(C) $\dfrac{3\pi}{4}$.　　(D) π.

分析　先将函数化为标准型:$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$,然后根据 $y=\cos x$ 的单调性分析 $f(x)$ 的单调性.

解　$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$,由 $2k\pi\leqslant x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi$ 可得:$2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. 当 $k=0$ 时,$-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$,因为 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 上是减函数,所以有

$[-a,a]\subseteq[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，解得：$a\leqslant\frac{\pi}{4}$，$a>0$. 所以 a 的最大值是$\frac{\pi}{4}$，选(A).

评注　(1) 本题把 $f(x)$ 化为正弦也行，即 $f(x)=\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，也可解出 a 的最大值，本题还可变问：求 a 的范围.

(2) 本题考查三角函数的单调性，涉及到三角函数的单调性(或与三角函数有关的单调区间)时，都需要先把函数变形为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+B$ 的形式，然后把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，利用 $y=\sin x$ 或 $y=\cos x$ 的单调性(或单调区间)来进行处理，需要注意的是 A 的正负对单调性的影响.

例 5　(2013 年陕西卷理科，16) 已知向量 $\mathbf{a}=(\cos x,-\frac{1}{2})$，$\mathbf{b}=(\sqrt{3}\sin x,\cos 2x)$，$x\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

分析　先将 $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 化为标准型：$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+B$ 的形式，然后代入周期公式求最小正周期，结合函数的单调性和图象确定最大值和最小值.

解　$f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos x\cdot\sqrt{3}\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

(Ⅰ) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(Ⅱ) 当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，由标准函数 $y=\sin x$ 在$[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$上的图象知：

$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[f(-\frac{\pi}{6}),f(\frac{\pi}{2})]=[-\frac{1}{2},1]$.

所以，$f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值分别为 1 和 $-\frac{1}{2}$.

评注　(1) 本题考查三角函数的周期性和最值，应注意最值与所给区间有关；

(2) 一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中 A、ω、φ 为常数，$x\in\mathbf{R}$) 的周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，最大值为 $|A|$，最小值为 $-|A|$；函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$(其中 A、ω、φ 为常数) 的周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$；

(3) 形如 $y=a\sin x+b\cos x$ 的函数要先化成 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，再求周期和最值.

例 6　(2017 年江苏卷，16) 已知向量 $\mathbf{a}=(\cos x,\sin x)$，$\mathbf{b}=(3,-\sqrt{3})$，$x\in[0,\pi]$.

(1) 若 $\mathbf{a}//\mathbf{b}$，求 x 的值；

(2) 记 $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

分析　(1) 向量平行：$\mathbf{a}//\mathbf{b}\Rightarrow x_1y_2=x_2y_1$；(2) 化简 $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，根据 $f(x)$ 的表达式的特征求出相应最值.

解　(1) 因为 $\mathbf{a}=(\cos x,\sin x)$，$\mathbf{b}=(3,-\sqrt{3})$，$\mathbf{a}//\mathbf{b}$，所以 $-\sqrt{3}\cos x=3\sin x$.

若 $\cos x=0$，则 $\sin x=0$，这与 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 矛盾，所以 $\cos x\neq 0$，于是 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $x\in[0,\pi]$，于是 $x=\frac{5\pi}{6}$.

(2) $f(x)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\cos x,\sin x)\cdot(3,-\sqrt{3})=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，故 $-1\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{6})\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

于是，当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最大值 3；当 $x+\frac{\pi}{6}=\pi$ 即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-2\sqrt{3}$.

评注　(1) 求与三角函数有关的最值或值域时，常需要把所给函数按照三角恒等变换规律变形为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+B$ 的形式，然后再求值域或最值；

(2) 三角函数图象与性质是高考重要考查内容，要求学生通过图象的观察以及图形与数量关系的分析，再通过想象对所给的数学问题进行直观表达，感悟问题本质，形成解决问题的思路，以此来考查学生的直观想象核心素养.

4. 考查解三角形

例 7 (2014 年江苏卷,14) 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$,则 $\cos C$ 的最小值是________.

分析 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$,可以得到三边关系,求 $\cos C$ 的最小值可通过边的表达式特征,应用基本不等式求出最小值.

解 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,则由正弦定理得 $a+\sqrt{2}b=2c$. 故

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(\frac{a+\sqrt{2}b}{2})^2}{2ab}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{\sqrt{2}}{2}ab}{2ab}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2}{2ab}-\frac{\sqrt{2}}{4}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{3}{4}a^2\cdot\frac{1}{2}b^2}}{2ab}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

当且仅当 $3a^2=2b^2$,即 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 时等号成立.

评注 (1) 本题考查了应用正弦定理、余弦定理解决角度问题,关键是边角的转换;

(2) 解三角形问题,首先要求学生根据所给问题,画出对应平面图形,分析图形与数量关系,然后进行直观想象、恰当选择定理,进行严谨的逻辑推理,准确表达问题,以此考查学生直观想象、逻辑推理等核心素养.

5. 考查三角变换

例 8 (2018 年全国 Ⅱ 卷,15) 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$,$\cos\alpha+\sin\beta=0$,则 $\sin(\alpha+\beta)=$______.

解析 观察目标 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 知道前进的方向,对已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$,$\cos\alpha+\sin\beta=0$ 知道从哪里着手,它们之间的差异是要出现积的形式,所以要把已知两边同时平方,得:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta=1,$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\sin\beta=0,$$

然后两式相加,整理得得 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

例 9 (2018 年江苏卷,16) 已知 α,β 为锐角,$\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;

(2) 求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

分析 (1) 先观察角的差异,$\cos 2\alpha$ 要用二倍角公式,这就要求出 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 值;(2) 观察角 $\alpha-\beta$ 与已知角之间的差异,可变换为 $\alpha-\beta=2\alpha-(\alpha+\beta)$.

解 (1) 因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,所以 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$.

又因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$.

因此,$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

(2) 因为 α,β 为锐角,所以 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,因此 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,所以

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}.$$

因此,

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]$$
$$=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\cdot\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}.$$

评注 (1) 三角变换的主要方法有:异名化同名,异角化同角,异次化同次,所用工具就是三角变换公式,目标是把所求角进行恒等变形,转化到已知角,然后应用公式转化为已知角的三角函数值问题;

(2) 三角变换要求学生会用数学的眼光观察问题,通过已知角与所求角之间的数据分析,找到角之间的差异,然后进行等价转化,合理运用三角公式解决问题.

6. 考查三角函数应用问题

例 10 (2014 年江苏卷,18) 如图 1,为保护河上古桥 OA,规划建一座新桥 BC,同时设立一个圆形保护区,规划要求:新桥 BC 与河岸 AB 垂直,保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆,且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80 m,经测量,点 A 位于点 O 正北方向 60 m 处,点 C 位于点 O 正东方向 170 m 处(OC 为河岸),$\tan\angle BCO=\frac{4}{3}$.

(1) 求新桥 BC 的长;

(2) 当 OM 多长时,圆形保护区的面积最大?

分析 (1) 解决问题首先要建立适当的坐标系,然后利用三角函数定义;(2) 利用古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80 m,列出不等式组,求出 OM 长的范围,即可求出圆形保护区的面积最大值.

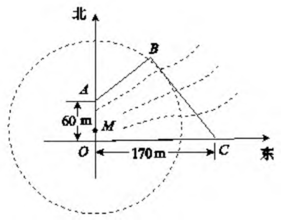

图 1

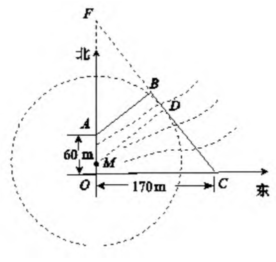

图 2

解 (1) 如图 2 所示,延长 OA, CB 交于点 F. 以 O 为坐标原点, OC 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系 xOy.

因为 $\tan\angle FCO=\dfrac{4}{3}$,所以 $\sin\angle FCO=\dfrac{4}{5}$, $\cos\angle FCO=\dfrac{3}{5}$. 因为 $OA=60$,$OC=170$,所以 $OF=OC\tan\angle FCO=\dfrac{680}{3}$,$CF=\dfrac{OC}{\cos\angle FCO}=\dfrac{850}{3}$,从而 $AF=OF-OA=\dfrac{500}{3}$.

因为 $OA\perp OC$, 所以

$$\sin\angle AFB=\sin\angle FCO=\frac{4}{5}.$$

又因为 $AB\perp BC$,所以 $BF=AF\cos\angle AFB=\dfrac{400}{3}$,从而 $BC=CF-BF=150$.

因此新桥 BC 的长是 150 m.

(2) 设保护区的边界圆 M 与 BC 的切点为 D,连接 MD,则 $MD\perp BC$,且 MD 是圆 M 的半径,并设 $MD=r$ m,$OM=d$ m $(0\leqslant d\leqslant 60)$.

因为 $OA\perp OC$, 所以

$$\sin\angle CFO=\cos\angle FCO=\frac{3}{5}.$$

又 $\sin\angle CFO=\dfrac{MD}{MF}=\dfrac{MD}{OF-OM}=\dfrac{r}{\dfrac{680}{3}-d}$,

所以 $\dfrac{r}{\dfrac{680}{3}-d}=\dfrac{3}{5}$,所以 $r=\dfrac{680-3d}{5}$.

因为 O 和 A 到圆 M 上任意一点的距离均不少于 80 m,所以

$$\begin{cases} r-d\geqslant 80, \\ r-(60-d)\geqslant 80, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \dfrac{680-3d}{5}-d\geqslant 80, \\ \dfrac{680-3d}{5}-(60-d)\geqslant 80, \end{cases}$

解得 $10\leqslant d\leqslant 35$.

故当 $d=10$ 时,$r=\dfrac{680-3d}{5}$ 最大,即圆面积最大.

所以,当 $OM=10$ m 时,圆形保护区的面积最大.

评注:(1) 本题以“保护河上古桥”为应用情境,颇具时代气息,为广大考生所熟悉,从生产到生活,有着较好的现实性、普遍性、公平性和考生的可接受性,真是“数学来源于生活,又应用于生活”;

(2) 考题以“保护河上古桥”为应用情境,涉及圆、直线、三角函数等元素,与河上古桥相辅相成,相印成趣,组成一副优美的数学图形,增加了数学应用的美感和诗的意境美,这不仅可以培养考生的审美能力,还可唤醒他们对数学的美好情感,有很好的数学文化熏陶作用;

(3) 从解题的角度审视,本题从不同的思维角度切入,可以得到不同的解题路径,反映出不同的思维方向,引发不同的解法,为考生创新思维的发挥提供了表现的舞台;

(4) 各地高考卷都有一道数学应用题,通过对应用问题的处理,看学生是否能够运用数学语言,清晰、准确地表达数学建模的过程与结果,以此来考查学生数学建模核心素养,数学建模实质上是对现实问题进行数学抽象,要求学生会用数学语言表达问题,会用数学方法建构数学模型并解决问题,这不仅能提升学生的实践能力,还能增强学生的创新意识和科学精神.

三、备考策略

1. 切实掌握三角函数的概念、图象和性质,抓好学生对这些内容实质性的理解,在复习时应充分将数和形结合起来,利用图象的直观性得出函数的性质,这样既利于掌握函数的图象和性质,又能熟练运用数形结合的思想方法,从而培养、提高学生的数学抽象、直观想象等核心素养;

2. 切实掌握三角函数的基本变换思想与三角函数的恒等变形,抓好学生对定理、公式的理解与运用,使学生能正用、逆用、变形用,从而培养、提高学

生的数据分析、逻辑推理、数学运算等核心素养;

3. 切实加强三角函数的应用意识,既要注意在有些实际问题中建立三角函数模型,利用三角函数知识来解决问题,更要注意在代数、平面向量、解析几何、导数等问题中建立三角函数模型,使问题获得简捷的解法,从而培养、提高学生的数学建模核心素养.

四、对高考复习的启示及建议

1. 读懂用好“课标”,使指导复习更加精准

教学是教师的专业实践,数学教师专业体现在根据自己对数学的理解、对教学的理解、对学生的理解,研究好课程标准与考试说明,设计好数学教案,通过课堂教学,规范地指导学生学习、会学、学好数学. 综合对近几年三角函数高考题的分析与研究,估计高考三角函数部分仍以基本题为主,仍以选择题(或填充题)与解答题出现,解答题可以独立命题,也可与向量、数列、不等式、导数等知识综合. 知识上主要涉及到:(1)三角函数的基本概念;(2)三角函数式的化简与求值;(3)对公式的考查仍以诱导公式、基本关系式、两角和与差的三角函数公式为主;(4)三角函数图象与性质,特别是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的考查,通过 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,求三角函数的值域、单调区间、图象变换、周期等;(5)应用三角函数模型、三角函数性质及有界性分析问题、解决问题.

2. 重视夯实基础,让复习目标更加明确

所谓“基础”,是指基础知识、基本技能、基本思想方法、基本活动经验,它是学生形成素养的基础,脱离了“基础”,素养就成了“无源之水、无本之木”,对于三角函数的复习,应当立足课本,紧扣高考真题,不需要过份加宽加深. 要让学生充分认识到解答三角函数高考题的关键是进行必要的三角恒等变形,其解题通法是:发现差异,寻找联系,对准目标,合理转化. 观察是解题的门户,联想是解题的关键.

因此,我们首先要抓好学生对三角函数基本概念的实质性理解,其次要抓好三角函数有关公式、定理的理解与运用,还要抓好三角函数基本题型的掌握与方法的运用,特别要熟练掌握三角函数图象与性质及三角变换. 从近几年三角函数高考题看,三角恒等变换是研究三角函数性质及其应用的一种工具,在高考中主要考查三角恒等式的变形、化简、求值与证明,其中“变”是三角恒等变换的主题,角的变换、三角函数名称的变换、三角函数次数的变换是高考中考查三角函数题的热点. 这类问题的求解策略通常是:将复杂的三角式通过三角变换(变角、变次、变名)等价转化成标准形:$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$,得到标准形后,就可画出图象或确定它的性质(定义域、值域、单调性、奇偶性、周期、对称性等),只有这样才能在运用时融会贯通.

有关三角形的三角函数问题在历年高考中频频出现,属于基础题层面,主要考查学生应用正弦定理、余弦定理实现边与角的相互转化,得出纯粹的边与边的关系或者角与角的关系.

3. 培育核心素养,让学生学习更有后劲

学习数学,除了必要的数学知识和掌握必要的数学技能之外,更重要的是获得基本的数学素养,会用数学的眼光观察世界,会用数学的思维思考世界,会用数学的语言表达世界. 数学教师要严格执行“课程标准”,让学生通过“正确”的过程学习“正确”的知识,习得数学核心素养 ,改变简单的记忆模仿. 高三数学复习,内容多、习题多、考试多、压力大,教师只有用数学的思考方式来引导学生分析问题,揭示问题所蕴含的数学背景,再进一步将问题一般化,这样不但能解决一个问题,而是能解决一类问题,起到四两拔千斤的作用. 数学的课堂教学,不仅仅是数学的基础知识、基本技能、基本思想的传授,更重要的是训练学生清晰地表达思想方法,有条理地思考、解决问题,并要对所学进行反思、总结、概括,全面提升学生的数学核心素养. 通过这样的教学,容易拔动学生心灵的琴弦,使学生越学越想学.

参考文献:

[1] 崔绪春. 彰显课改新理念　追求新颖显特色——2014 年高考江苏卷第 18 题评价[J]. 数学教学通讯,2015(1).
[2] 卢明. 注重基础关注素养　落实高考要求——2017 年浙江高考数学卷评析[J]. 数学通报,2018(2).

(收稿日期:2018—12—11)

指向数学文化渗透的试题命制
—— 以一道高考“解析几何” 模拟试题的命制为例

王永生
(云南师范大学数学学院　云南师范大学附属怒江州民族中学,673199)

笔者有幸参加了云南省 2017 年高中毕业生复习统一检测数学试卷的命题工作,笔者所负责的是整份试卷的解析几何部分. 完成测试后,这道立足于教材、蕴含数学素养、渗透了数学文化的试题反响较好. 回想这道试题的命制过程,感慨颇多.

一、立意:确定所命制试题的考查方向

一道试题的命制应先确定其考查的方向,即试题命制的立意. 这不仅要理解数学,理解考试大纲,更要理解整个高考的评价体系. 为了命制一道高考“解析几何” 模拟试题,有必要先对下面的四个方面进行分析,再进行立意.

1. 对高考评价体系的认识

高考考试内容改革更加注重顶层设计,突出考试内容的整体设计和科学构建,现已形成“一体四层四翼” 的高考评价体系. “一体” 即高考评价体系. 通过确立“立德树人、服务选拔、导向教学” 这一高考核心立场,回答了“为什么考” 的问题;通过明确“必备知识、关键能力、学科素养、核心价值” 四层考查目标以及“基础性、综合性、应用性、创新性” 四个方面的考查要求,回答了高考“考什么” 和“怎么考” 的问题. “一体” 是总体框架,“四层” 与“四翼” 是“一体” 的有机组成部分,共同构成了实现高考评价功能的理论体系[1].

2. 高考考试大纲修订的理解

2003 年颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》已经把“体现数学的文化价值” 作为高中数学课程的基本理念之一. 2016 年 10 月 8 日,教育部考试中心下发《关于 2017 年普通高考考试大纲修订内容的通知》,对 2017 年普通高考考试大纲修订内容进行了发布. 其中数学学科修订的内容是:在能力要求内涵方面,增加了基础性、综合性、应用性、创新性的要求,增加了数学文化的要求. 即高考已明确要考查“数学文化”. 如图 1 所示,这与核心素养背景下新修订课程标准的大方向是一致的. 即高考已从“知识立意” 到“能力立意” 逐步走向“素养立意”,并突出对“数学文化” 的考查.

3. 考试大纲对解析几何的考查要求

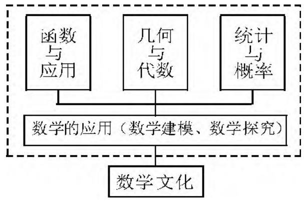

图 1

高考对解析几何的考查主要涉及三部分:[2]

(1) 直线与方程:① 在平面直角坐标系中,结合具体图形,确定直线位置的几何要素;② 理解直线的倾斜角和斜率的概念,掌握过两点的直线斜率的计算公式;③ 能根据两条直线的斜率判定这两条直线平行或垂直;④ 掌握确定直线位置的几何要素,掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式),了解斜截式与一次函数的关系;⑤ 能用解方程组的方法求两直线的交点坐标;⑥ 掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式,会求两条平行直线间的距离.

(2) 圆与方程:① 掌握确定圆的几何要素,掌握圆的标准方程与一般方程;② 能根据给定直线、圆的方程,判断直线与圆的位置关系;能根据给定两个圆的方程,判断两圆的位置关系;③ 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题;④ 初步了解用代数方法处理几何问题的思想.

(3) 圆锥曲线与方程:① 掌握椭圆的定义、几何图形、标准方程和简单几何性质(范围、对称性、顶点、离心率);② 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程,知道其简单的几何性质(范围、对称性、顶点、离心率、渐近线);③ 了解抛物线的定义、几何图形和标准方程,知道其简单的几何性质(范围、对称性、顶点、离心率);④ 理解数形结合的思想;⑤ 了解圆锥曲线的简单应用.

由此可见,高考对直线、圆和椭圆的要求较高,特别是在现行考试大纲三个选考模块中删去“几何证明选讲” 后,圆的内容会有所加强. 同时还会加强对“坐标法”、“方程思想” 和“数形结合的思想” 这三个解析几何的核心内容进行考查.

4. 高考对数学文化的考查特点

数学文化是人类文化的重要组成部分，其内涵是一种理性思维方法在实践过程中不断探索、形成的数学史，数学精神及数学应用. 高考试题主要从数学史、数学精神、数学应用三个方面渗透数学文化[3]. 而在高考试题中，解析几何试题主要考查两大类问题：一是根据题设条件，求出平面曲线的方程；二是通过方程，研究平面曲线的性质.

为此，在命制试题时，可立足解析几何的两大类问题，以直线、圆和椭圆为载体，在强化“素养立意”的同时，突出对数学文化的渗透.

二、命题：探寻指向数学文化渗透的试题命制路径

在确定了所命制试题的考查方向后，笔者一般都会对与之相关的教材例习题、高考题、奥赛题和一些模拟试题进行对比分析，从而逐步缩小命题的范围. 此题的命制也不例外，最先引起笔者注意的是下面的试题：

题 1　(2008 年全国高中数学联赛山东赛区预赛第 15 题) $F(1,0)$ 为一定点，$P(0,b)$ 是 y 轴上的一动点，点 $M(a,0)$ 满足 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}=0$. 若点 N 满足 $2\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\mathbf{0}$，求：

(Ⅰ) 点 N 的轨迹曲线 C 的方程；

(Ⅱ) 曲线 C 的任意两条相互垂直的切线的交点轨迹.

借助向量的知识，由坐标法不难求得曲线 C 的方程为 $y^2=4x$. 这是解析几何的第一类问题，充分体现了基础性和综合性. 第(Ⅱ)问讨论曲线 C 的两条相互垂直的切线的交点轨迹问题，需分类讨论且和函数导数的几何意义相结合，是解析几何中的一类较为重要的问题，然而难度较大，且仍为第一类问题. 但圆锥曲线切线交点的轨迹问题所涉及情形较多，可通过改编进行考查. 下面的高考题就是一次较为成功的改编：

题 2　(2014 年全国高考广东卷文科第 20 题) 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的标准方程；

(Ⅱ) 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

此题第(Ⅰ)问由待定系数法不难求得椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. 这明显源于教材的例习题. 对第(Ⅱ)问的研究较多，主要在解法的多样性和变式方面比较突出. 但最让笔者感兴趣的还是由此所得的一般性结论：

动点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点，过点 P 所作椭圆的两条切线的斜率之积为定值 t，则点 P 的轨迹方程为 $tx^2-y^2+b^2-ta^2=0$.

证明过程略. 特别地，当 $t=-1$ 时，点 P 的轨迹方程为圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$，此即为初等数学中的蒙日圆. 数学史作为试题背景，主要包括数学家的生平故事，数学史事件，数学名著，数学名题，数学发展的历史等[3]. 此题的第(Ⅱ)问仍求圆锥曲线的两相互垂直切线交点的轨迹问题，但却考查了著名的蒙日圆，成功地以数学名题的形式将数学文化渗透于试题中，充分体现了考试大纲所确定的数学文化考查方向. 为此，可确定此次命题以蒙日圆为载体. 那要如何命制试题才能具有一定的创新性呢？

1. 教材寻根，正面出击，渗透文化

综合前面两道试题可确定要命制试题的第(Ⅰ)问可设定为根据条件求椭圆的标准方程. 考虑到其基本题型可分为两类：一是已知轨迹类型求轨迹方程；二是不知轨迹类型求轨迹方程. 常用的求法有：

(1) 坐标法：直接通过建立 x、y 之间的关系，构成 $F(x,y)=0$，是求轨迹的最基本的方法；

(2) 定义法：如果能够确定动点的轨迹满足某已知曲线的定义，则可由曲线的定义直接写出方程；

(3) 待定系数法：可先根据条件设所求曲线的方程，再由条件确定其待定系数，代回所列的方程即可；

(4) 代入法(相关点法或转移法)；

(5) 交轨法(参数法)：当动点 $P(x,y)$ 坐标之间的关系不易直接找到，也没有相关动点可用时，可考虑将 x、y 均用一中间变量(参数)表示，得参数方程，再消去参数可得普通方程.

各种方法间的关系如图 2 所示：

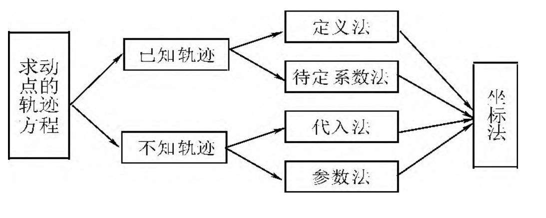

图 2

不难看出，前面两道试题分别考查了坐标法、待定系数法和交轨法. 其中，前两种方法是课标要求的重点，教材在例习题上的配置也有明显的体现. 考虑到椭圆实质上是由圆经过伸缩变换后得到的，为此，教材还安排了两道例习题来进行说明.

题 3 (人教 A 版普通高中课程标准实验教科书数学选修 1-1 第 34 页例 2)如图(略),在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上任取一点 P,过点 P 作 x 轴的垂线段 PD,D 为垂足. 当点 P 在圆上运动时,线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么?

题 4 (人教 A 版普通高中课程标准实验教科书数学选修 1-1 第 43 页习题 2.1B 组第 1 题)如图(略),$DP \perp x$ 轴,点 M 在 PD 的延长线上,且 $\frac{|DM|}{|DP|} = \frac{3}{2}$. 当点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上运动时,求点 M 的轨迹方程,并说明轨迹的形状,与例 2 相比,你有什么发现?

从这两道题目不难看出,圆与椭圆间确实存在着这样的伸缩关系. 众所周知,这是一种非常重要的数学思想. 而且题目的求解需要学生先探求轨迹的形状,通过操作感受椭圆的形成过程,并在此基础上借助代入法寻找规律,从而将感性认识上升为理性行为.

数学精神的内涵是人们在依靠思维能力对感性材料进行一系列抽象、概括、分析和综合,形成概念、判断或推理的认识过程中反映出的,重视理性认识活动,以寻找事物的本质、规律及内部联系的精神[3].

培养学生的数学精神是数学教育的主要目标. 为此,可将教材习题进行改编,在第(Ⅰ)问引入椭圆的这一形成过程,借此考查学生的数学精神.

第(Ⅱ)问要以蒙日圆为载体,若还是直接考查,则明显创新性不足. 那要如何设置才好呢?下面高考题的命题手法值得借鉴.

题 5 (2013 年高考江苏卷 17)如图 3,在平面直角坐标系 xOy 中,点 $A(0,3)$,直线 l:$y = 2x - 4$. 设圆 C 的半径为 1,圆心在 l 上.

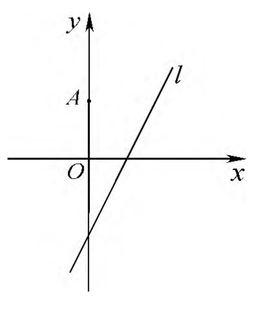

图 3

(Ⅰ)若圆心 C 也在直线 $y = x - 1$ 上,过点 A 作圆 C 的切线,求切线的方程;

(Ⅱ)若圆 C 上存在点 M,使 $MA = 2MO$,求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.

第(Ⅱ)问属范围问题,看似平淡无奇,实则暗流涌动. 蕴含着丰富的变化过程. 一方面点 M 在动圆 C 上运动;另一方面,由 $MA = 2MO$ 可知,点 M 还在阿氏圆 D 上运动,则圆 C 和圆 D 相交或相切. 据此,可求出横坐标 a 的取值范围.

仿此,可将此问设置为范围问题. 一方面,此问需有压轴的功能,另一方面,试题又不能太难. 为此,可考虑以直线与蒙日圆的位置关系为背景进行设置,从而有效实现通过方程,研究平面曲线的性质的目的.

据此,可命制试题如下:

试题 1 在圆 $x^2 + y^2 = 9$ 上任取一点 P,过点 P 作轴的垂线段 PD,D 为垂足. 点 M 在线段 DP 上,满足 $\frac{|DM|}{|DP|} = \frac{2}{3}$. 当点 P 在圆上运动时,设点 M 的轨迹为曲线 C.

(Ⅰ)求曲线 C 的标准方程;

(Ⅱ)若直线 $y = k(x + 5)$ 上存在一点 Q,使过点 Q 所作的曲线 C 的两条切线相互垂直,求实数 k 的取值范围.

2. 文化引领,反向着力,推陈出新

试题 1 以圆为背景,通过伸缩变换得到了椭圆 C,后由直线与圆锥曲线的位置关系,讨论参数的取值范围问题. 主要考查坐标法求轨迹方程和运用代数方法研究几何问题. 试题平淡无奇,但暗含伸缩变换和著名的蒙日圆,在渗透了数学文化的同时,突出考查了学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养. 以数学名题为载体,考查学生的数学文化,这是高考对数学文化考查的一条重要途径. 但是学生如果没能求出此圆,则难以体会到其价值所在. 更何况试题 1 中学生若不知蒙日圆的存在,则第(Ⅱ)问的顺利求解就具有一定难度. 为此,不妨先定义此圆,再考查与之相关的问题. 那要如何定义才好呢?下面的高考模拟试题具有一定的启发性.

题 6 (2013 年衡水中学高三训练题)给定椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$,称圆心在原点 O,半径为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆是椭圆 C 的"准圆". 若椭圆 C 的一个焦点为 $F(\sqrt{2},0)$,其短轴上的一个端点到 F 的距离为 $\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程和其"准圆"的方程;

(Ⅱ)点 P 是椭圆 C 的"准圆"上的一个动点,过动点 P 作直线 l_1,l_2,使得 l_1,l_2 与椭圆 C 都只有一个

交点,且 l_1,l_2 分别交其“准圆”于点 M,N,求证:$|MN|$ 为定值.

此“准圆”即为蒙日圆.题目一开始就进行了新定义,确实具有一定的创新性,并以此为基础,要求证明定值问题.其实质是前面广东高考题第(Ⅱ)问的逆问题:

给定椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,称圆心在原点 O,半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆是椭圆 C 的“准圆”.点 P 是椭圆 C 的“准圆”上的一个动点,过动点 P 作直线 l_1,l_2,使得 l_1,l_2 与椭圆 C 都只有一个交点,则直线 l_1,l_2 互相垂直.

其证明过程略,但这一命题方式却很值得借鉴,下面的模拟试题再次体现了这一命题特点:

题 7　(2017 年山东省济南市高三一模理科第 21 题)设椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,定义椭圆的“伴随圆”方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$;若抛物线 $x^2=4y$ 的焦点与椭圆 C 的一个短轴端点重合,且椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程和“伴随圆”E 的方程;

(Ⅱ)过“伴随圆”E 上任意一点 P 作椭圆 C 的两条切线 PA,PB,A,B 为切点,延长 PA 与“伴随圆”E 交于点 Q,O 为坐标原点.

(i)证明:$PA\perp PB$;

(ii)若直线 OP,OQ 的斜率存在,设其分别为 k_1,k_2,试判断 $k_1\cdot k_2$ 是否为定值.若是,求出该值;若不是,请说明理由.

很明显,这里的“伴随圆”就是蒙日圆.仿此,可命制试题 2 如下:

试题 2　规定圆 O:$x^2+y^2=a^2+b^2$ 为椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的卫士圆.此圆由法国数学家 G. Monge(1745—1818)最先发现,所以又将此圆称为蒙日圆.若一个椭圆的对称中心为原点,一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$,离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程和其卫士圆 O 的方程;

(Ⅱ)过该椭圆的卫士圆 O 上任意一点 P 作椭圆 C 的两条切线,分别交卫士圆 O 于 A,B 两点,求证:AB 恰好为卫士圆的直径.

试题 2 先入为主,先定义了蒙日圆,从而使蒙日圆从隐性变为了显性,从而对蒙日圆有了一定的认识.

第(Ⅰ)问由待定系数法不难得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,其卫士圆的方程为 $x^2+y^2=13$.第(Ⅱ)问欲证 AB 恰好为卫士圆的直径,则只需证两条切线互相垂直.从而成功转化为前面广东高考题第(Ⅱ)问的逆问题.可见,相对于前面广东高考题,试题 2 的难度明显降低.这种通过新定义的方式引入数学名题,文化引领,反向着力,推陈出新的命题手法仍是指向数学文化渗透的试题命制的主要路径.

三、思考:反思命题过程中的缺憾与不足

从最初接到命题任务,到确定命题方向,而后通过对高考题、奥赛题和一些模拟试题的分析,最后结合教材例习题完成了命题工作.这一过程对于一名一线教师而言确实充满了太多的艰辛.虽然命题过程还不够专业,所命制的试题原创程度还不够高,但这确实是一次非常难得的学习机会,自然在整个命题过程中也就留下了太多的思考.

1. 试题命制应源于立意,但不能受制于立意,为文化而文化

一道好试题的命制应有好的立意,这是不用怀疑的.但却不能拘泥于所谓的立意,更不能只是为了贴标签.而更应该立足学科自身特点,在确保试题的科学性、基础性、公平性的前提下,尽可能有所创新和体现其文化性.

试题 1 和试题 2 以数学名题(即蒙日圆)为背景,通过正面出击和反向着力两条途径.在考查了数学精神的同时,渗透了数学文化.虽然试题 1 不是那么明显,但仍然符合“以素养立意命题”的指导思想.新修订的高中数学课程标准将提出“数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象、数据分析”六大核心素养.今后高考将注重考查学生的素养,特别是对六大核心素养的考查.命题时只要突出对核心素养的考查,自然也就渗透了数学文化.此时,确实没有必要刻意去显示数学文化的存在.

在命题的过程中,笔者曾有以蒙日圆为背景,结合教材中的“台风问题”命制一道应用问题的设想,可由于过于牵强而作罢.事实上,只要围绕数学精神,所命制的试题自然指向数学文化.为此,可抛开蒙日圆的限制,于是还可命制出下面的试题.

试题 3　已知以原点 O 为中心,$F(\sqrt{5},0)$ 为右焦点的双曲线 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(Ⅰ)求双曲线 C 的标准方程及其渐近线方程;

(Ⅱ)若动点 $P(x_0,y_0)$ 为双曲线 C 外一点,且点

P 到双曲线 C 的两条切线相互垂直,求点 P 的轨迹方程.

由待定系数法可得双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$,点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=3$. 此题只是把前面 2014 年全国高考广东卷文科第 20 题中的椭圆换为了双曲线,而其解法则完全相类似. 考查了解析几何的两类基本问题,突出了对数学素养的考查,自然也渗透了数学文化.

一般性地,动点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外一点,过点 P 所作双曲线的两条切线互相垂直,则点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2-b^2$. 其证明过程略,不难看出,此轨迹仍是圆.

事实上,若给定一个椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则它的所有外切矩形的顶点在一个定圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上. 此圆称为椭圆的外准圆,也称蒙日圆. 若着力于椭圆的外切矩形,则又可命制出下面的试题.

试题 4 椭圆 E 经过点 $A(2,3)$,对称轴为坐标轴,焦点 F_1,F_2 在 x 轴上,离心率 $e=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)求椭圆 E 外切矩形的面积的取值范围.

由待定系数法可得椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$,椭圆 E 外切矩形的面积的取值范围是 $[32\sqrt{3},56]$.

一般性地,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的外切矩形的面积的取值范围是 $[4ab,2(a^2+b^2)]$. 证明过程请参看文献[4].

此试题第(Ⅱ)问计算难度有些大. 若要降低难度,直接考查蒙日圆,也可将第(Ⅱ)问改为:求椭圆 E 外切矩形的外接圆方程. 则此题与 2014 年全国高考广东卷文科第 20 题相似,只是设问方式有些不同而已.

当然,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的所有内接菱形的内切圆都是同一个圆,方程为 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 此圆也称为椭圆的内准圆[4]. 类似于蒙日圆,同样可以命制出与之相关的一些试题,在此不再赘述.

2. 将命题、测试和教学过程融为一体,全面渗透数学文化

编拟数学题是教师进行创造性教学活动的基本功. 一次命题过程实际上就是一次深度研究和学习的过程,这也是教师专业发展的一条途径. 而每次考试其实只是考查了所研究内容的一个侧面而已. 如前面所命制的四道试题,最终只使用了试题 1,但另外三个试题也是可圈可点的.

学习测试是一把尺子,它度量着我们的教与学;但它同时也是一种工具、一种方法,被教师和学生运用着来达成教与学的目标. 只有和教与学并驾齐驱,融为合力,这把尺子才能更好地发挥它的双重作用[5].

为此,笔者认为,在高三复习的冲刺阶段,对于一些具有研究价值的试题,可从命题的视角,对其进行深度研究. 将命题、测试和教学过程融为一体,立足基础,突出对学生数学素养的培养,同时进行数学文化渗透. 从而把指向数学文化渗透的试题命制转向在教学过程中渗透数学文化,最终实现文化育人的根本目的.

参考文献:

[1] 姜钢. 探索构建高考评价体系,全方位推进高考内容改革[N]. 中国教育报,2016,10月11日第3版.
[2] 教育部考试中心. 2017 年普通高等学校招生全国统一考试大纲(文科)[M]. 北京:高等教育出版社,2016. 12.
[3] 陈昂,任子朝. 突出理性思维,弘扬数学文化[J]. 中国考试,2015(3):10-14.
[4] 郑邦锁. 椭圆中的两个同心圆[J]. 中学数学教学参考:上旬,2013(12):35-37.
[5] 陈晓晶,张丰. 作为一种教学法的学习测试——兼作中小学校内考试制度的反思[J]. 基础教育课程,2016(13):80-88.

(收稿日期:2018-12-02)

素养导向下2018年高考数学全国卷Ⅰ理科第20题回望

阳志长

(湖南省株洲县第五中学，412100)

伴随着大数据时代的到来，概率与统计知识越来越受到人们的重视. “概率的研究对象是随机现象”，“统计的研究对象是数据，核心是数据分析”[1]，概率与统计为我们研究随机现象、认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法. 近年来，高考对概率统计的考查主要表现在“根据问题要求，利用统计数据，建立统计模型，做出合理判断，或者通过对随机现象的研究，发现必然结论，进而理解随机现象”[2]. 利用统计与概率思想解决现实和生活中的问题既是高中数学教学的重点，也是当前和今后高考考查的重要方向. 现以2018年高考全国卷Ⅰ理科第20题为例，进行试题回眸与展望，分析考查特点，展望考查前景，提出复习建议.

一、试题回眸

(一)试题再现

2018年高考全国卷Ⅰ理科第20题为：

某工厂的某种产品成箱包装，每箱200件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品. 检验时，先从这箱产品中任取20件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验，设每件产品为不合格品的概率都为$p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1)记20件产品中恰有2件不合格品的概率为$f(p)$，求$f(p)$的最大值点p_0；

(2)现对一箱产品检验了20件，结果恰有2件不合格品，以(1)中确定的p_0作为p的值. 已知每件产品的检验费用为2元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付25元的赔偿费用.

(i)若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为X，求EX；

(ii)以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

(二)试题评析

尽管试题是按照“课标(实验)”[3]命制出来的，但我们从中可以发现素养导向的命题意图，呈现出“从能力立意向素养导向”[4]的时代特征.

1. 命题注重基础知识的巩固与理解.

基础知识是承载问题解决、具有知识生成性和迁移性的核心知识. 本试题涉及概率的意义、抽样的方法、用样本估计总体的思想、独立重复试验、离散型随机变量及其分布列、数学期望等基础知识，且这些知识点具体而又全面，分小题设问，梯次推进，自然流畅，不但考查数据处理、数学运算等方式方法，而且考查相关知识的理解与迁移应用的能力. 第(1)题中，得到$f(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}(0<p<1)$后，如果不把函数的概念、导数的方法等知识迁移到解决问题中，而是采用教材[5]第58页“探究与发现”栏目“服从二项分布的随机变量取何值时概率最大”中的方法处理数据，不但耗费更多时间，而且正确率大打折扣. 于知识交汇点处设置问题，成为本试题的独特风景，也为考生提供了更大的创新、发挥空间.

2. 命题注重情境化的考查.

情境包括现实的生活实践情境活动与学术探究情境活动. 本试题创设的主要“生活实践情境”是“产品质检”，“先从这箱产品中任取20件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验”，“若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付25元的赔偿费用”；而主要数学探究情境是“数据分析”，“各件产品是否为不合格品相互独立”意味着什么，为什么“求$f(p)$的最大值点p_0”，“以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据”又意味着什么等. 这些情境化的语言生动而又严谨，自然地融入试题之中，形成具有生命活力的问题情境，不但考查考生适应新定义、进入新情境的能力，而且考查考生在具体问题情境中提取有用数据信息、用数学的方式甄别并转化问题情境的必备品质.

本文系湖南省教育科学“十三五”规划2016年度课题“基于大数据的普通高中数学课堂教育教学行为变革的行动研究”(课题批准号：XJK016CZXX033)的研究成果.

第(1)题中,只有把“先从这箱产品中任取 20 件作检验”与“各件产品是否为不合格品相互独立”结合起来,进入问题情境,才能建立模型“$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$”,为后续解题开辟道路;第(2)(i)题中,只有把“若有不合格品进入用户手中,则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用”与“检验费用与赔偿费用的和记为 X”统一起来,才能建立模型“$X=40+25Y$,其中 Y 为余下的 180 件产品的不合格产品件数”,为数据分析提供支持. 注重情境化的考查,是本试题的命题特点之一,要求考生运用生活化的实际场景,并且依靠科学的方法和态度进行数据分析、数学推理,进而得到最终的答案.

3. 命题注重科学思维的考查.

科学思维是对客观的事物本质的属性以及潜在的规律和相互之间的关系的一种认知方式,这种方式必须建立在实际的事实之上去建构相应的模型. 这道试题并没有枯涩难懂的新概念,难能可贵的是把习以为常的比较法、潜在规律融合在认知方式与科学思维的考查之中. 第(2)(ii)题中,尽管“以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据”,但如何利用第(2)(i)题中的计算结果、EX 的值,考量着解题者的数学思维方式,考生可以从第(2)题所给情境中找到解决问题的“钥匙”:求出“对这箱余下的所有产品作检验,检验费用与赔偿费用和的期望值”,在比较期望值大小的基础上、用数据说话,进行科学决策,破解这道次“压轴题”的难点. 注重科学思维的考查,也是本试题的命题特点之一,通过合理的推理与客观的经验来形成解决不现成问题的思维方式,从而得到问题的最优解.

(三)障碍所在

概率统计的应用问题一直是教学的难点,学生害怕解答应用性问题,阅读理解、提取题目有用信息的能力差,审题缺乏耐心. 本试题字符较多,涉及随机抽样、二项分布、离散型随机变量、期望等诸多内容,解题时存在理解和运用方面的障碍.

1. 二项分布的意义理解障碍.

体现在学生对二项分布的产生背景和形成过程不甚理解,以致不能识别、建立模型“$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$”.

其实,二项分布源于独立重复试验,基本点是“在相同条件下做 n 次重复试验”,根据组合数的意义得到事件 A 发生 k 次的概率,学生常与超几何分布混淆. 它们的区别在于超几何分布需要知道总体容量、是不放回抽取,而二项分布不需要知道总体容量、是有放回抽取.

2. 新情境下数学语言的理解障碍.

体现在学生对“各件产品是否为不合格品相互独立”、“这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X”等新情境语言理解不到位,以致不能建立模型“$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$”,不能确定随机变量 X 的表达式“$X=40+25Y$”.

特别是对试题结构的认识、理解不到位,以致在新情境下小题与大题之间的关系断层,忽视 $Y\sim B(180,\frac{1}{10})$,造成计算 EY 的思维障碍.

3. 应用方面的障碍.

体现在知识链条割裂,缺乏迁移活度,以致得到关系“$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$”、$Y\sim B(180,\frac{1}{10})$ 后,不能运用“导数方法”求 $f(p)$ 的最大值点 p_0、不能运用公式 $EY=np$ 去求 EY 的值.

其实,导数的工具性突出体现在探讨函数的单调性,进一步求函数极值、最值,解决现实生活中的最优化问题. 但学生缺乏用“导数方法”解决统计问题的经验,尽管命题者注重人文关怀、引入函数符号“$f(p)$”,但终究没能把具有应用障碍的考生从思维惯性中拉回来.

二、试题展望

透过现象,揭示本质. 从上述素养导向的试题出发,展望概率统计解答题的命题前景,我们主要有下列认识.

(一)追求目标指向开放

数学问题,由四部分组成,这就是条件、目标、运算、依据. 数学解题就是把数学问题由条件状态转化为目标状态,其中运算是指允许对条件采取的行动,依据是指允许运算或允许运算信息. 上述试题,在“根据问题要求,利用统计数据,建立统计模型,做出合理判断”框架下,“运算”具有隐蔽性,对数据分析、数学建模素养要求比较高. 给出基本问题,目标指向开放,根据提出不同层次的问题给予不同的分数,或许是概率统计应用题的一个命题方向. 如本试题给出第(2)题信息后,让考生“根据上述信息,提出一个问题,并选择数字特征,回答或说明你所提出的问题”. 这样,就要求考生按照“三数”(众数、中位数、平均数)、“三差”(极差、方差、标准差)的特征,从试题提供的数据中提取有用信息,选择恰当的数字特征、按照数学的方式去尝试提出问题,并作出回答或说明;根据考生提问与答问情况计分、评价,就可以区分出考生数据分析、数学建模的水平层次.

(二) 关注整体性的考查

整体性与碎片化是相对的. “碎片化” 原意是指完整的东西破成诸多零块,随着互联网时代的到来,不但让受众群体呈现碎片化,而且让受众需求呈现碎片化,“人们常常需要对网络、文本、声音、图像等反映的信息进行数字化处理”[1],这使统计与概率的研究领域与应用领域得到极大拓展. 作为应用问题命题主线,统计与概率试题结构将关注从碎片化到整体性的考查. 不是在一道题中考查全部知识,而是根据应用特点,整体布局,统筹安排,分别在选择或填空、解答题中设置相关问题,前后关联,递进式考查概率与统计知识,使概率与统计解答题成为数学应用问题的“重头戏”、整卷的“压轴题”,达到必要的广度和深度,以区分数据分析核心素养的水平层次,引导考生重视数据存储与分析.

(三) 关注科学探究能力的考查

科学探究,是按照一定的科学思维过程去探索学习、问题解决的过程,从中学习科学方法,发展科学探究所需要的能力. 上述试题,在“通过对随机现象的研究,发现必然结论,进而理解随机现象” 框架下,“探究” 的味道较浓,考生要在思考、辨析、运算、比较、综合等探究活动中,探求适当的结论和规律,作出统计推断. 给出基本问题,创设新的情境,变换设问角度和知识的组合方式,考查科学探究能力,或许是概率统计应用题的另一个命题方向. 如本试题给出主题背景后,不进行分小题设问,而是让学生思考:“如何科学决策、根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验” ?并附注参考资料,按照考生探究出来的“解决方案” 的可行性计分. 这样,把提取数据有用信息、确立“p 值” 与科学决策标准的探究权还给考生,把用现存方法解决不现成问题的创新权还给考生,使考生在决胜高考的考场上积聚未来面对各种挑战问题的数学方案和智慧.

三、复习建议

掌握基本的数据处理方法,具备基本的统计思维能力和数据分析能力是大数据时代公民应具备的基本素养. 就数学教育而言,要抓住学生在高考复习数据处理分析能力提升的关键时期,立足主要问题,通过培养数据处理分析能力提升其数学核心素养,强化数据分析意识,培养统计思维能力,以应对数学高考和未来人生的挑战.

(一) 创设情境,引导学生发现提出问题

教学情境包括现实情境、数学情境、科学情境,每种情境可以分为熟悉的、关联的、综合的. 概率统计知识源于生产实践与社会实践,复习时,教师要重视从现实情境中提出学生熟悉的、关联的问题,创设教学情境,导引学生“数学化”、抽象出模型,努力揭示概率统计模型产生的背景和缘由. 同时,要鼓励学生从现实情境、数学情境中去发现提出问题,逐渐建构他们发现、提问、利用数据的意识和能力. 如在获得“直方图”、“散点图”、“列联表” 等处理数据的模型后,可让学生根据现实情境、所举案例,进行数据分析、解决问题、提出新的问题,在挖掘已有数据新的信息价值的过程中,进一步建构数据分析、统计思维的意义.

(二) 突出主干,整体重构概率统计知识

高考试题把相互关联的知识串联、整合在一起,把概率统计知识创新运用于生产和社会实践,充分反映了知识之间的内在规律和相互联系. 复习时,教师要注重引导学生回归概率统计核心知识的生成过程,突出主干知识的教学. 特别是要突出知识主干,整体重构概率统计知识. 如在复习课中,可建构知识主干:收集数据 —— 处理、整理数据 —— 统计分析、估计、推断,并把相关知识融入到主干知识中,提炼出四大问题:利用样本频率分布直方图、茎叶图、计算来处理分析数据,运用分布或数字特征估计总体;利用散点图、回归方程、计算来处理分析数据,运用回归直线方程预报具有相关关系两个变量的预报变量值;利用离散型随机变量的分布列、正态分布、计算来处理分析数据,运用数字特征、“3σ” 法则与小概率事件结合起来,进行统计推断;利用“列联表” 来处理分析分类变量,运用独立性检验原理进行统计推断.

(三) 变更问题,不断提升统计思维能力

统计思维是一种利用数据的信息规律分析、探索、解决问题的思维形式,它是一种创造性思维. 但这种思维能力不是与生俱来的,而是通过专门学习训练来获得.

1. 变更案例,增强现场感.

复习时,回归教材提供的案例,引导学生变更问题情境、从身边寻找案例,增强现场感,使学生从中学习收集、处理、分析数据的方法,悟道运用统计思维解决问题的真谛. 如通过“高尔顿板”[5] 重建正态分布的概念与模型后,让学生举出服从正态分布的随机现象实例,通过熟悉的案例,使学生进一步理解“3σ 原则” 与小概率事件的关系,提高现场感和应用意识.

2. 变更问题情境,增强阅读理解力.

复习时,要针对学生阅读理解题目的障碍,精选

题目,变更问题情境,引导学生解读题意、用自己的语言表述问题,以增强阅读理解能力,熟悉基本问题情境、减轻学生解答概率统计问题的思想负担和心理压力.

3. 改变设问方式,提升数据处理分析能力.

复习时,要针对学生数据处理分析的障碍,精选高考试题,改变设问方式,引导学生在不同问题背景下,学习利用信息技术收集、处理、分析数据的方法,以及运用统计语言解释、表达问题的方式,以培养学生的科学探究能力,不断提升他们的数据处理分析和统计思维能力.

四、结束语

大数据时代对数据处理分析、统计思维能力提出了更高的要求,高中数学教学要顺应这一历史潮流,着力培养学生的数据分析素养. 回眸试题,展望前景,立足问题,落实复习,通过高考复习,让更多学生"适应数字化学习的需要,增强基于数据表达现实问题的意识,形成通过数据认识事物的思维品质;积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验"[1],成就高考和人生.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018.
[2] 陈昂,任子朝. 数学思想方法在高考中的考查实践[J]. 中学数学教学参考,2017(8):2-5.
[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京:人民教育出版社,2003.
[4] 任子朝. 从能力立意到素养导向[J]. 中学数学教学参考,2018(5):开卷有益.
[5] 人民教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书数学选修2-3(A版)[M]. 北京:人民教育出版社,2009.

(收稿日期:2018—12—02)

(上接第23页)

的口头和书面表达的能力. 在知识层面上,高二的新课学习及高三第一轮复习中已在直观描述中理解了数列极限,也学会了应用无穷等比数列各项和. 在方法层面上,学生在高中学习中基本掌握了从特殊到一般、抽象概括、从有限到无限的数学思想. 本教学设计具有以下特点:

1. 融入数学文化,有机整合教材.

整合体现在将高二及高三教材中的例题和阅读材料与"再探极限思想"的课题相结合,贯穿其中,同样也体现在将数学史中适合用于高中数学课堂的极限思想相关故事穿插于其中,通过对古今中外数学家在运用极限思想得到的研究成果深化了数学的育人价值.

2. 基于数学文化,合理进行探究.

探究体现在对与例题进行梯度设计,在最近发展区进行教学设计的指导思想下,使抛物线封闭面积的求法能更切合学生的学习起点,并举一反三,巩固切割思想.

3. 运用数学文化,开拓数学视野.

引入历史上的数学家在极限思想上的研究成果,在教师的设计下,在例题的铺垫下,与之对话,开拓数学视野,启迪明智.

三、结束语

倡导数学课堂文化,构建具有良好主体性的数学教学生态,有助于数学知识、技能、能力、思维、方法和文化的传授,形成整体性的、与生活方式和数学基本经验良好互动的教学场,有益于学生数学核心素养的培育并使学生终生受益.

同时,具有文化敏感度和文化包容性的课堂教学绝不是仅仅把知识作为一种事实或结论或传递给学生,而是对具体知识作深入的文化分析,向学生表达出来或引导学生探究知识的文化属性、文化思想、文化精神和文化思维方式,体现出知识对学生的文化影响力,真正达成"转识成智""以文化人"的目的.[3] 在数学课堂上,只有将数学知识与数学文化相辅相承,而不是将文化剥离于数学知识,才能实现核心素养的培育目标.

参考文献:

[1] 奚定华. 数学教学设计[M]. 上海:华东师范大学出版社,2001.
[2] 聂晓颖,黄秦安. 论数学课堂文化的内涵与模式及对培养数学核心素养的价值[J]. 数学教育学报,2017(4).
[3] 郭元祥,吴宏. 论课程知识的本质属性及其教学表达[J]. 课程·教材·教法,2018(8).

(收稿日期:2018—11—18)

我为高考设计题目

题 283　如图 1,已知点 P 是 x 轴下方(不含 x 轴)一点,抛物线 C:$y=x^2$ 上存在不同的两点 A,B 满足 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{EB}$,其中 λ 为常数,且 D,E 两点均在 C 上,弦 AB 的中点为 M.

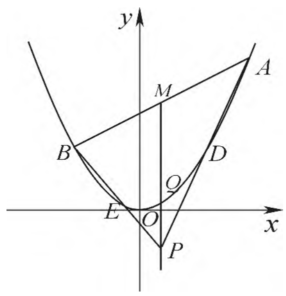

图 1

(Ⅰ)若 P 点坐标为 $(1,-2)$,$\lambda=3$ 时.

(ⅰ)求弦 AB 所在的直线方程;

(ⅱ)设抛物线过 A,B 的切线的交点为 N,证明:点 N 在直线 PM 上;

(Ⅱ)若直线 PM 交抛物线于点 Q,求证:线段 PQ 与 QM 的比为定值.

解　(Ⅰ)(ⅰ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为 $\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{PE}=3\overrightarrow{EB}$,可求得 $D(\frac{1+3x_1}{4},\frac{-2+3y_1}{4})$,$E(\frac{1+3x_2}{4},\frac{-2+3y_2}{4})$.

由 D 点在 C 上可得 $\frac{-2+3y_1}{4}=(\frac{1+3x_1}{4})^2$,化简得 $x_1^2-2x_1-3=0$.

同理可得 $x_2^2-2x_2-3=0$. 所以 x_1,x_2 是二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的两不等实根 3,-1. 不妨设 $A(3,9)$,$B(-1,1)$,所以 $k_{AB}=\frac{9-1}{3-(-1)}=2$,弦 AB 所在直线的方程为 $y-1=2(x+1)$,即 $2x-y+3=0$.

(ⅱ)由(ⅰ)可知,$x_M=\frac{-1+3}{2}=1$,直线 PM 的方程为 $x=1$. 因为 $y'=2x$,所以 $k_{AN}=6$,切线 AN 的方程为 $y-9=6(x-3)$,即 $6x-y-9=0$.

同理可得,切线 BN 的方程为 $2x+y+1=0$.

解方程组 $\begin{cases}6x-y-9=0,\\2x+y+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=-3.\end{cases}$

所以,抛物线过 A,B 的切线的交点 N 在直线 PM 上.

(Ⅱ)设 $P(x_0,y_0)$,$A(x_1,x_1^2)$,$B(x_2,x_2^2)$,因为 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{DA}$,则 $D(\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda},\frac{y_0+\lambda x_1^2}{1+\lambda})$,由 D 点在 C 上可得 $\frac{y_0+\lambda x_1^2}{1+\lambda}=(\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda})^2$,化简得

$$\lambda x_1^2-2\lambda x_0x_1+(1+\lambda)y_0-x_0^2=0.$$

同理可得:

$$\lambda x_2^2-2\lambda x_0x_2+(1+\lambda)y_0-x_0^2=0.$$

显然 $x_1\neq x_2$,所以 x_1,x_2 是二次方程 $\lambda x^2-2\lambda x_0x+(1+\lambda)y_0-x_0^2=0$ 的两不等实根,所以

$$x_1+x_2=2x_0,x_1x_2=\frac{(1+\lambda)y_0-x_0^2}{\lambda},$$

所以 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=x_0=x_P$,

所以直线 PM 的方程为 $x=x_0$.

又 $y_M=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$

$$=\frac{(1+2\lambda)x_0^2-(1+\lambda)y_0}{\lambda},$$

$y_Q=x_0^2$,

$y_M-y_Q=\frac{(1+\lambda)(x_0^2-y_0)}{\lambda}$,

$y_Q-y_P=x_0^2-y_0$,

所以 $|QM|=\frac{1+\lambda}{\lambda}|PQ|$,

即线段 PQ 与 QM 的长度比为定值 $\frac{1+\lambda}{\lambda}$.

考察目标　试题以抛物线为载体,考查直线与抛物线的位置关系、向量共线、定比分点公式、导数、切线以及一元二次方程的根与系数关系等相关知

识,在知识的交汇处命题,突出对解析几何中定点(定位)、定值等热点的考查,旨在对学生数学知识综合运用能力以及数据运算、数学探究能力和逻辑推理能力的考查,可以作为高三复习阶段综合性训练试题.

设计思路 本题的命题是受到 2018 年高考数学浙江省卷第 20 题的启发,浙江省试题是以抛物线为载体,是在给出抛物线外一点与抛物线上两点的连线的中点均在该抛物线上,让考生去探究图形的性质,重点考查直线与抛物线的位置关系和一元二次方程的根与系数的关系. 本题在编写时考虑到求导的可行性,故选取开口向上的抛物线方程,这样便于求抛物线的切线方程. 同时,在数据处理上,注意简洁与自然,如 P 点横坐标为 1,纵坐标为 -2,λ 的数值取 3,就像顺手拈来,显得极其自然. 第(Ⅰ)小题通过特殊位置的探讨,旨在让学生认识到只要给定点 P 的坐标,就可以利用定比分点坐标公式(或者向量共线)求出分点坐标,然后代入抛物线方程,即可得到坐标满足的关系式,进而求出抛物线上相应点的坐标,从而得到所求的直线方程;同时也能得到对应点切线的斜率,从而通过两条切线方程求出交点坐标,便可证明点 N 在已知直线上. 第(Ⅱ)小题是挖掘图形的内在性质,是原创也是热点问题,是对一般情况下的定值证明. 旨在通过第(Ⅰ)小题对特殊情形探究的基础上,引导学生去发现直线 PM 垂直于 x 轴,从而可得 Q 点的纵坐标,然后通过纵坐标间关系得到线段长度间的比值. 试题两问之间存在内在的联系,但是思维具有较大的跨度,试题的区分度明显,突出对学生的类比能力和数学运算能力的考查.

难度系数 0.45.

命题人 翟洪亮(江苏省太湖高级中学 214125)

题 284 已知函数 $f(x)=ax-\sin x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上不单调,求 a 的取值范围;

(2) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)<\frac{1}{6}x^3$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解 (1) 由已知,得 $f'(x)=a-\cos x$,$0<\cos x<1$.

① 当 $a\geqslant 1$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,则函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,此时不合题意;

② 当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,则函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减,此时不合题意;

③ 当 $0<a<1$ 时,由 $f'(x)=a-\cos x=0$,得 $\cos x=a$,则存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$,使得 $\cos x_0=a$. 当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x_0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f'(x)>0$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上不单调.

综上,a 的取值范围是 $(0,1)$.

(2) 当 $a\geqslant 1$ 时,由(1)中①知:$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,所以,对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,有 $f(x)>f(0)=0$,即 $ax>\sin x$. 其中,当 $a=1$ 时,对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,有 $\sin x<x$,从而 $\sin^2\frac{x}{2}<(\frac{x}{2})^2$.

令 $g(x)=ax-\sin x-\frac{1}{6}x^3\ (0<x<\frac{\pi}{2})$,则

$$\begin{aligned}g'(x)&=a-\cos x-\frac{1}{2}x^2\\&=a-1+1-\cos x-\frac{1}{2}x^2\\&=a-1+2\sin^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x^2\\&<a-1+2(\frac{x}{2})^2-\frac{1}{2}x^2\\&=a-1.\end{aligned}$$

① 当 $a\leqslant 1$ 时,$g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减,从而 $g(x)<g(0)=0$,此时满足题意.

② 当 $a>1$ 时,设 $h(x)=a-\cos x-\frac{1}{2}x^2\ (0<x<\frac{\pi}{2})$,则 $h'(x)=\sin x-x<0$,从而 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减,于是 $a-\frac{\pi^2}{8}=h(\frac{\pi}{2})<h(x)<h(0)=a-1$,再分情况讨论:

(i) 当 $a \geqslant \frac{\pi^2}{8}$ 时,$h(x) \geqslant 0$,即 $g'(x) \geqslant 0$,则 $g(x)g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,从而 $g(x) > g(0) = 0$,此时不满足题意.

(ii) 当 $1 < a < \frac{\pi^2}{8}$ 时,一定存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$,使得 $h(x_0) = 0$,所以,当 $0 < x < x_0$ 时,$g'(x) = h(x) > 0$;当 $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,$g'(x) = h(x) < 0$. 所以,函数 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减. 所以,一定存在 $x_1 \in (0, x_0)$,使得 $g(x_1) > g(0) = 0$,因此,不满足题意.

综上,a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

考查目标　本题主要考查导数的计算及应用、三角函数的性质、不等式的放缩,要求学生具有较强的缜密的思维能力、代数推理能力、代数变形能力、运算求解能力以及突出的应变能力,充分体现分类讨论、转化与化归、函数与方程、数形结合等数学思想方法,能够彰显学生的数学素养,具有明显的区分度.

设计思路　本题是根据泰勒展开式"$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$"命制的,即右边只保留两项,配置参数,由相等转化为不等. 第(1)问的设置主要为第(2)问的放缩提供依据. 大学教材主要研究的是抽象函数,中学主要是借助含参的具体函数,替代抽象函数进行形式化的推理,选拔出适应高等数学学习能力的学生. 虽然题干简练,设问普通,但却匠心独运,步步惊心;学生在求解时,需要较强的迁移能力,克服以往的思维定势,扫清若干道障碍. 在扫清这些障碍时,凸显创新意识和综合能力.

难度系数　0.40.

命题人　王甜甜(山东省枣庄市第八中学北校区数学组　277000)

题 285　已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$,$g(x) = ax + b$.

(1) 若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,求实数 a 的取值范围;

(2) 若直线 $g(x) = ax + b$ 是函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 图象的切线,求 $a + b$ 的最小值;

(3) 当 $b = 0$ 时,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个交点 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,求证:$x_1 x_2 > 2e^2$.

(取:$e = 2.8$,$\ln 2 = 0.7$,$\sqrt{2} = 1.4$.)

解　(1) $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1}{x} - ax - b$,则 $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - a$.

因为 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,所以,对 $\forall x > 0$,都有 $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - a \geqslant 0$,即对 $\forall x > 0$,都有 $a \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. 而 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$,所以 $a \leqslant 0$,故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

(2) 设切点为 $(x_0, \ln x_0 - \frac{1}{x_0})$,则切线方程为 $y - (\ln x_0 - \frac{1}{x_0}) = (\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2})(x - x_0)$,整理得

$$y = (\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2})x + (\ln x_0 - \frac{2}{x_0} - 1).$$

令 $\frac{1}{x_0} = t > 0$,由题意得

$$a = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = t + t^2,$$

$$b = \ln x_0 - \frac{2}{x_0} - 1 = -\ln t - 2t - 1.$$

令 $a + b = \varphi(t) = -\ln t + t^2 - t - 1$,则

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t} + 2t - 1 = \frac{(2t+1)(t-1)}{t}.$$

当 $t \in (0, 1)$ 时,$\varphi'(t) < 0$,当 $t \in (1, +\infty)$ 时,$\varphi'(t) > 0$,所以 $a + b = \varphi(t) \geqslant \varphi(1) = -1$.

故 $a + b$ 的最小值为 -1.

(3) 由题意知

$$\ln x_1 - \frac{1}{x_1} = ax_1,$$

$$\ln x_2 - \frac{1}{x_2} = ax_2,$$

两式相加、得

$$\ln x_1 x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = a(x_1 + x_2).$$

两式相减得

$$\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = a(x_2 - x_1),$$

即$\dfrac{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\dfrac{1}{x_1x_2}=a$，所以

$$\ln x_1x_2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$=\left(\frac{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{1}{x_1x_2}\right)(x_1+x_2),$$

即 $\ln x_1x_2-\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\cdot\ln\dfrac{x_2}{x_1}$.

不妨令 $0<x_1<x_2$，记 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，令 $F(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $F'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)}>0$，所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $F(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>F(1)=0$，所以 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，则 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$，所以，

$$\ln x_1x_2-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}>2.$$

又 $\ln x_1x_2-\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}<\ln x_1x_2-\dfrac{4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}$

$=\ln x_1x_2-\dfrac{4}{\sqrt{x_1x_2}}=2\ln\sqrt{x_1x_2}-\dfrac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$,

所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\dfrac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1$.

令 $G(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$，则 $x>0$ 时，$G'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}>0$，所以 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $G(\sqrt{2}e)=\ln\sqrt{2}e-\dfrac{2}{\sqrt{2}e}=\dfrac{1}{2}\ln2+1-\dfrac{\sqrt{2}}{e}\approx 0.85<1$，所以 $G(\sqrt{x_1x_2})>1>G(\sqrt{2}e)$，则 $\sqrt{x_1x_2}>\sqrt{2}e$，即 $x_1x_2>2e^2$.

考查目标　考查利用导数判断函数的单调性，求函数的切线方程及最值，基本不等式等基础知识；考查等价转化、函数与方程、数形结合、化归转化等数学思想，考查综合运用知识解决问题的能力.

设计思路　本题是笔者为我市期末联考命制的一道压轴题，题干简洁，考查点丰富. 题目的背景是南京市 2014 届高三第三次模拟考试第 19 题第(3)问：已知函数 $f(x)=\ln x-mx$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，求证：$x_1x_2>e^2$. 第(1)小题根据函数的单调性判断参数的取值范围，属于常规动作；第(2)小题基于函数的动切线，引导学生研究参数之间的变化范围，平凡中考功力，体现了导数的应用价值；第(3)小题熟悉中蕴创新，相对于背景题，改编后的问题综合性加大，对学生灵活运用所学知识解决问题的能力提出了较高要求. 背景题中，只要从 $\ln x_1-mx_1=0$，$\ln x_2-mx_2=0$ 两式消去参数 m 后，再构造函数求范围即可完成，改编后的第(3)问在由 $\ln x_1-\dfrac{1}{x_1}=ax_1$，$\ln x_2-\dfrac{1}{x_2}=ax_2$ 消去参数 a 后，同样需要构造函数 $F(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$ 来确定$\dfrac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}>2$，但与背景题相较，这一构造相对隐蔽，没有较强的分析观察能力很难得到. 另外，问题的更精彩之处在于：需要借助于基本不等式放缩来构造一个新的不等式 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\dfrac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1$，再巧妙地借助于 $G(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 的单调性，并通过合理的估算来解决问题. 另外，题目给出的几个参考数据也很有讲究，相对于原始的 e，$\ln2$，$\sqrt{2}$ 值，提供的近似值或放大，或缩小，到底是放大还是缩小都以科学性为原则，并非简单地为了方便计算，而且 2.8，0.7，1.4 都和 7 关联，体现出奇异的美感. 最后要说明的是，结论 $x_1x_2>2e^2$ 中的系数 2 并非最佳的，但对于考试题，却是合适的. 整个问题层层递进，波澜起伏，区分度高，有效地考查了学生的学习水平.

难度估计　0.30.

命题人　张俊（江苏省兴化市第一中学 225700）

从一道竞赛题的解法改进感悟命题与解题

田 辉

(安徽省泗县第一中学,234300)

数学竞赛题必须难似乎已成共识,这也是许多教师和学生不愿意接触数学竞赛题的原因所在,这对培养学生的数学兴趣是不利的. 要想改变这种困境,教师们应该认真钻研竞赛题的命题轨迹和解题策略,从而在教学中化难为易,点石成金,进而让学生感受数学的魅力,提升学习数学的兴趣,走上数学探究之路.

笔者多年从事数学竞赛辅导工作,对于数学竞赛题的命题与解题有所感悟. 本文从一道竞赛题的解法改进开始,谈谈笔者的一些心得体会,以期抛砖引玉.

一、一道竞赛题的解法改进

题 1 (1994 年中国香港数学奥林匹克试题)设 $x,y,z\geqslant 0$,满足 $xy+yz+zx=1$,求证:

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

针对此题,不少竞赛辅导的资料和教师采用如下三角变换的方法予以处理.

证明 由已知条件知:x,y,z 中至多有一个等于 0.

若 $x=0$,则 $yz=1$,原不等式的左边为

$$\begin{aligned}&y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\\&=y-yz^2+z-zy^2=y-z+z-y\\&=0<\frac{4\sqrt{3}}{9},\end{aligned}$$

原不等式成立.

故只需证 x,y,z 都大于 0 的情形.

注意到不等式的结构及三角公式 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$,设 $x=\tan\dfrac{A}{2}$,$y=\tan\dfrac{B}{2}$,$z=\tan\dfrac{C}{2}$,$A,B,C\in(0,\pi)$.

由 $xy+yz+zx=1$ 得 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$,所以

$$1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}).$$

又 $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}=\tan\dfrac{A+B}{2}\cdot(1-\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B}{2})$,所以

$$\begin{aligned}&1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\\&=\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A+B}{2}\cdot(1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}).\end{aligned}$$

由 $xy+yz+zx=1$ 知 $0<xy=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B}{2}<1$,所以 $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\neq 0$,故可得 $\tan\dfrac{C}{2}\cdot\tan\dfrac{A+B}{2}=1$,即 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2})$.

又因为 $0<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,$0<\dfrac{A+B}{2}<\pi$,所以 $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$,即 $A+B+C=\pi$.

注意到 $1-x^2=1-\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{\tan A}$,$1-y^2=1-\tan^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\tan\frac{B}{2}}{\tan B}$,$1-z^2=1-\tan^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{2\tan\frac{C}{2}}{\tan C}$ 及恒等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\tan C$,可得

$$\begin{aligned}&x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)\\&\quad+z(1-x^2)(1-y^2)\\&=\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{2\tan\frac{B}{2}}{\tan B}\cdot\frac{2\tan\frac{C}{2}}{\tan C}+\tan\frac{B}{2}\cdot\frac{2\tan\frac{C}{2}}{\tan C}\cdot\\&\quad\frac{2\tan\frac{A}{2}}{\tan A}+\tan\frac{C}{2}\cdot\frac{2\tan\frac{A}{2}}{\tan A}\cdot\frac{2\tan\frac{B}{2}}{\tan B}\\&=4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cdot\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}\\&=4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=4xyz\end{aligned}$$

$$=4\sqrt{(xy)\cdot(yz)\cdot(zx)}$$
$$\leqslant 4\sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3}$$
$$=4\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

综上可得:

$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

上述证法巧妙地运用了三角代换、非直角$\triangle ABC$中的恒等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$、三元均值不等式等知识,很好地诠释了数学竞赛题的解法之妙和难度之大. 但上述解法过于注重技巧,在令人惊叹之余,难免让人生畏. 笔者从展开变形的通性通法入手,发现此题还有如下简洁证法.

另证　因为 $x,y,z\geqslant 0$,$xy+yz+zx=1$,所以

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$$
$$=(x-xy^2-xz^2+xy^2z^2)+(y-yx^2-yz^2+yz^2x^2)+(z-zx^2-zy^2+zx^2y^2)$$
$$=(x-yx^2-zx^2)+(y-xy^2-zy^2)+(z-xz^2-yz^2)+(xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2)$$
$$=x[1-(xy+zx)]+y[1-(xy+yz)]+z[1-(zx+yz)]+xyz(yz+zx+xy)]$$
$$=xyz+y\cdot zx+z\cdot xy+xyz\cdot 1=4xyz$$
$$=4\sqrt{(xy)\cdot(yz)\cdot(zx)}$$
$$\leqslant 4\sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3}$$
$$=4\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

所以 $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

上述改进后的证法通俗易懂,具有一般性,很好地体现了简捷易行的变形过程,容易被广大师生所接受,不失为一种好的证法.

两种证法一难一易,一雅一俗,原证法体现了试题的深刻背景和广泛联系,新证法体现了试题的基础性和普适性. 两种证法相得益彰,很好地体现了数学竞赛题命题时的基础性、普适性及背景深刻和联系广泛等基本原则,也很好地诠释了数学竞赛题解题时解法的多样性,有难有易,有雅有俗. 从命题和解题这两个角度评价,题 1 是一道优质的竞赛题.

二、如何命制数学竞赛题

基于对题 1 的认识及平时的研究体会,笔者认为以下几点应该在命制数学竞赛题时有所考虑.

1. 试题的起点要低

试题总会有一个源头,也就是题根. 作为试题的生发点,题根应该为大家所熟知,而且是基本的、基础的和简单的. 题 1 的题根是如下的条件恒等式:

若 $xy+yz+zx=1$,则 $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

该恒等式经过展开分组变形容易得到,起点低,难度低,学生易于接受.

以下例子也是一次成功的命题.

题 2　(2006 年中国国际集训队测试题)设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$,$abcd=1$,求证:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant 1.$$

证明　因为 $a>0$,$b>0$,所以

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}-\frac{1}{1+ab}$$
$$=\frac{1}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}\cdot[(1+b)^2(1+ab)+(1+a)^2(1+ab)-(1+a)^2(1+b)^2]$$
$$=\frac{1-2ab+a^3b+ab^3-a^2b^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}$$
$$=\frac{(ab-1)^2+ab(a-b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}$$
$$\geqslant 0,$$

所以 $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geqslant\frac{1}{1+ab}$.

同理可得 $\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant\frac{1}{1+cd}$.

又因为 $abcd=1$,所以

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}$$
$$\geqslant\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}\geqslant\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+\frac{1}{ab}}=1,$$

故 $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant 1$.

题 2 的题根是如下简单恒等式:$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x}=1$,即 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$,其中 $x\neq -1$ 且 $x\neq 0$.

2. 试题的联系要广

试题的背景要深刻,联系要广泛,也就是涉及的知识点要多、知识面要宽. 题 1 涉及了三角换元、三角形中恒等式、三角公式、均值不等式、变形技巧、构造法等知识,还考查了逻辑推理、直观想象、运算能力等数学核心素养. 题 1 既有代数形式和代数解法,又有几何背景和几何证法,可谓背景深刻,联系广泛. 题 1 的三角背景如下:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中,$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$;

(2) 非直角 $\triangle ABC$ 中,$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

上述两个三角恒等式是常见的基本结论,为大家所熟知. 以下例子也是一次成功的命题.

题 3 (1996 年全国高中数学联赛题) 求实数 a 的取值范围,使得对任意 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,恒有 $(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}$.

解　令 $y=x$,则有

$$\begin{cases}x-y=0,\\ [x-(-3-2\sin\theta\cos\theta)]^2+[y-(-a\sin\theta\\ \quad-a\cos\theta)]^2\geqslant\frac{1}{8}.\end{cases}$$

所以,原问题等价于:

对 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,若点 $(-3-2\sin\theta\cos\theta,-a\sin\theta-a\cos\theta)$ 到直线 $x-y=0$ 的距离的平方大于或等于 $\frac{1}{8}$,求实数 a 的取值范围.

由点到直线的距离公式得

$$\left[\frac{|(-3-2\sin\theta\cos\theta)-(-a\sin\theta-a\cos\theta)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right]^2\geqslant\frac{1}{8},$$

所以 $|-3-2\sin\theta\cos\theta+a(\sin\theta+\cos\theta)|\geqslant\frac{1}{2}$.

令 $\sin\theta+\cos\theta=t$,则 $t=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}]$,且 $2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$,所以 $|-3-(t^2-1)+at|\geqslant\frac{1}{2}$,即 $|t^2+2-at|\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $t^2+2-at\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $t^2+2-at\leqslant-\frac{1}{2}$.

所以 $a\leqslant t^2+\frac{3}{2t}$ 或 $a\geqslant t^2+\frac{5}{2t}$,其中 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

所以,$a\leqslant\sqrt{6}$ 或 $a\geqslant\frac{7}{2}$.

题 3 的几何背景是如下常见的距离公式:

(1) 平面内两点间的距离公式:若 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

(2) 点到直线的距离公式:点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

3. 试题的解法要多

试题解法要体现多样性,要有难有易,这不仅有利于学生解题,而且会使试题更具研究价值. 这样的试题不仅会培养学生的解题兴趣和钻研精神,而且会使题目本身更有活力和生命力. 题 1 的两种证法一难一易,一雅一俗,二者相互映衬,相得益彰,使试题内涵更丰富. 以下例子也能很好地诠释试题解法的多样性.

题 4 (第 20 届 IMO 试题) 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不相等的正整数,求证:对任何正整数 n,不等式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 成立.

证法 1　应用排序不等式.

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 按照数值从小到大排列为 $b_1,b_2,\cdots,b_n(b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n)$,则 $b_k\geqslant k(k=1,2,\cdots,n)$.

又 $\frac{1}{1^2}\geqslant\frac{1}{2^2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{k^2}$,由排序不等式得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

证法 2　应用权方和不等式.

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不相等的正整数,所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

由权方和不等式得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{1}{k})^2}{\frac{1}{a_k}}\geqslant\frac{(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$$

$$\geqslant\frac{(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^2}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

证法 3　应用 Abel 变换.

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不相等的正整数，设 $A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，$B_k=1+2+\cdots+k$，则 $A_k\geqslant B_k$.

由 Abel 变换，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}=\frac{1}{n^2}A_n+\sum_{k=1}^{n-1}[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}]A_k$$

$$\geqslant\frac{1}{n^2}B_n+\sum_{k=1}^{n-1}[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}]B_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

证法 4　应用柯西不等式.

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不相等的正整数，所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

由柯西等式得

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^2=(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}})^2$$

$$\leqslant(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})\cdot(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})\leqslant(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2})\cdot(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}),$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

以上分别从排序不等式、权方和不等式、Abel 变换、柯西不等式入手证明了题 4，完美地诠释了竞赛题解法的多样化，充分地展现了数学的魅力，令人爱不释手.

三、如何应对竞赛题的难度大

从整体来说，数学竞赛题的难度较大，一般学生望而却步，心中畏惧，不敢触碰，这种现象是正常的. 如何应对这一现状？如何通过解数学竞赛题培养学生的数学学习兴趣和研究激情？笔者认为，教师的合理引导是关键.

首先，教师要引导学生克服畏难的心理障碍. 从竞赛题的题根入手，由浅入深，使学生树立起自信心，使他们明白并坚信：只要方法得当，每个人都可以有所收获.

其次，教师要引导学生从外形特征上把握式子结构，从而联想到相关结论予以解题. 许多竞赛题的解法具有创意，有时需要构造，联想是尤为重要的. 如题 1，由 $xy+yz+zx=1$ 联想到 $\triangle ABC$ 中的恒等式 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$. 如题 3，由式子的结构特征联想到了相关的距离公式. 这些联想往往都是解题的关键所在.

再者，教师要引导学生合作交流. 自主探究是需要的，但一个人的力量往往是有限的，教师要鼓励和引导学生乐于交流、善于交流，如组织班内数学兴趣小组，参加校内数学竞赛辅导等. 数学竞赛题的解法往往具有多样性，这也表明合作交流应该成为一种重要的学习方式. 以下例子是笔者一次记忆犹新的经历，其能够很好地诠释合作交流的重要性和必要性.

题 5　(数学奥林匹克问题) 已知 x,y,z 为正实数，证明：

$$\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{zx}{x^2+2y^2+z^2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

文[3] 的参考答案如下：

证明　设 $u=x^2$，$v=y^2$，$w=z^2$，则

$$\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{zx}{x^2+2y^2+z^2}$$

$$=\frac{xy}{(y^2+z^2)+(z^2+x^2)}+\frac{yz}{(z^2+x^2)+(x^2+y^2)}+\frac{zx}{(x^2+y^2)+(y^2+z^2)}$$

$$\leqslant\frac{xy}{2\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)}}+\frac{yz}{2\sqrt{(z^2+x^2)(x^2+y^2)}}+\frac{zx}{2\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{\frac{uv}{(v+w)(w+u)}}+\sqrt{\frac{vw}{(w+u)(u+v)}}+\sqrt{\frac{wu}{(u+v)(v+w)}}].\quad ①$$

设 $a=v+w$，$b=w+u$，$c=u+v$，则 $a+b-c=2w>0$，$b+c-a=2u>0$，$c+a-b=2v>0$，因此，以 a,b,c 为三边的边长，可以构成一个三角形，设为 $\triangle ABC$.

又设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则 $u=p-a$，$v=p-b$，$w=p-c$，故

$$\text{式}①=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}.\quad ②$$

由半角公式和余弦定理可得：

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

又由琴生不等式可得

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant 3\sin\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}=\frac{3}{2}.$$

故式② $=\frac{1}{2}(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})\leqslant\frac{3}{4}$.

从而，原不等式成立.

上述证法技巧性强，难度大，学生多感到力不从心. 笔者将此题留作课后作业，要求学生以分组的形式展开合作交流. 以下是学生交流后提供的一种简捷证法.

证明　设 $u=x^2, v=y^2, w=z^2$，则

$$\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{zx}{x^2+2y^2+z^2}$$

$$=\frac{\sqrt{uv}}{(u+w)+(v+w)}+\frac{\sqrt{vw}}{(u+v)+(u+w)}+\frac{\sqrt{uw}}{(u+v)+(v+w)}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{uv}}{2\sqrt{(u+w)(v+w)}}+\frac{\sqrt{vw}}{2\sqrt{(u+v)(u+w)}}+\frac{\sqrt{uw}}{2\sqrt{(u+v)(v+w)}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{u}{u+w}\cdot\frac{v}{v+w}}+\sqrt{\frac{v}{u+v}\cdot\frac{w}{w+u}}+\sqrt{\frac{u}{u+v}\cdot\frac{w}{v+w}}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u}{u+w}+\frac{v}{v+w}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{u+v}+\frac{w}{w+u}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{u+v}+\frac{w}{v+w}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4},$$

所以 $\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{zx}{x^2+2y^2+z^2}\leqslant\frac{3}{4}$.

两种证法对比，第二种证法自然简捷，易于理解和接受，优势明显. 可见，合作交流往往会碰撞出集体智慧的火花，从而实现学生共同提高，同时，作为学生成长的引路人和见证者的教师也得以提升，真正实现了教学相长.

参考文献：

[1] 张垚，沈文选，冷岗松编著. 奥林匹克数学中的真题分析[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2014 年 12 月.

[2] 金蒙伟，李胜宏主编. 从自主招生到竞赛 · 高中数学(上册)[M]. 杭州：浙江大学出版社，2014 年 1 月.

[3] 数学奥林匹克问题(上期问题解答)[J]. 中等数学，2015(1).

(收稿日期：2018—10—20)

(上接第 3 页)

有效引领.

最后，一定要让学生感悟到代数形式中蕴藏着轨迹，认真体会数和形的对应，而不是机械记忆隐圆的各种代数形式，否则有重新坠入新的无意义学习的渊薮. 教师只有揭示了这一点，这节课才能升华境界，超越常伦.

参考文献：

[1] 罗增儒. 中学数学课例分析[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2003 年 2 月.

[2] 张俊. 发现隐圆 突破解题壁垒[J]. 数学教学，2015(7).

(收稿日期：2018—12—18)

2017 年湖北高中数学预赛第 7 题的类似

杨志明

(广东省广雅中学，510160)

2017 年湖北高中数学预赛第 7 题是：

题 1 已知正实数 a,b 满足 $ab(a+b)=4$，则 $2a+b$ 的最小值为________.

文[1] 给出了四种解法，文[2] 给出了六种解法，今再给出一种平衡系数法.

解 设 x 为待定系数，且 $0<x<1$，则

$$2a+b=x(a+b)+(2-x)a+(1-x)b$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{x(2-x)(1-x)ab(a+b)}$$
$$=3\sqrt[3]{4x(2-x)(1-x)},$$

当且仅当 $x(a+b)=(2-x)a=(1-x)b=t$ 时取等号. 即 $a=\dfrac{t}{2-x}$，$b=\dfrac{t}{1-x}$，$a+b=\dfrac{t}{x}$，故 $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{x}$，即

$$x(1-x)+x(2-x)=(2-x)(1-x),$$

解得 $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$(舍).

当 $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，

$$2a+b=(1-\frac{\sqrt{3}}{3})(a+b)+(1+\frac{\sqrt{3}}{3})a+\frac{\sqrt{3}}{3}b$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}ab(a+b)}$$
$$=2\sqrt{3}.$$

此法的优点是，只引进一个待定参数，借助均值不等式，将问题转化为解一元方程问题. 而且，借助此法，能够将本题的变量增加到三元、四元、五元甚至更高元.

类似题 1 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc(a+b+c)=1$，求 $3a+2b+c$ 的最小值.

解 设 x 为待定系数，且 $0<x<1$，则

$$3a+2b+c$$
$$=x(a+b+c)+(3-x)a+(2-x)b+(1-x)c$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{x(a+b+c)\cdot(3-x)a\cdot(2-x)b\cdot(1-x)c}$$
$$=4\sqrt[4]{x(3-x)(2-x)(1-x)\cdot abc(a+b+c)}$$
$$=4\sqrt[4]{x(3-x)(2-x)(1-x)},$$

当且仅当 $x(a+b+c)=(3-x)a=(2-x)b=(1-x)c=t$ 时取等号.

即 $a=\dfrac{t}{3-x}$，$b=\dfrac{t}{2-x}$，$c=\dfrac{t}{1-x}$，$a+b+c=\dfrac{t}{x}$，故 $\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{x}$，即 $2x^3-9x^2+11x-3=0$，整理得 $(2x-3)(x^2-3x+1)=0$，注意到 $0<x<1$，则 $2x-3\neq 0$，从而 $x^2-3x+1=0$，解得 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$(舍).

当 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 时，$4\sqrt[4]{x(3-x)(2-x)(1-x)}=4$，此时

$$abc(a+b+c)=\frac{t^4}{x(3-x)(2-x)(1-x)}$$
$$=\frac{t^4}{1}=1,$$

即 $t=1$，此时，$a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

因此，$3a+2b+c$ 的最小值是 4.

类似题 2 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$，且 $abcd(a+b+c+d)=1$，求 $4a+3b+2c+d$ 的最小值.

解 设 x 为待定系数，且 $0<x<1$，则

$$4a+3b+2c+d$$
$$=x(a+b+c+d)+(4-x)a+(3-x)b+(2-x)c+(1-x)d$$
$$\geqslant 5\sqrt[5]{x(a+b+c+d)\cdot(4-x)a\cdot(3-x)b\cdot(2-x)c\cdot(1-x)d}$$
$$=5\sqrt[5]{x(4-x)(3-x)(2-x)(1-x)\cdot abcd(a+b+c+d)}$$
$$=5\sqrt[5]{x(4-x)(3-x)(2-x)(1-x)},$$

当且仅当 $x(a+b+c+d)=(4-x)a=(3-x)b=(2-x)c=(1-x)d=t$ 时取等号.

即 $a=\dfrac{t}{4-x}$，$b=\dfrac{t}{3-x}$，$c=\dfrac{t}{2-x}$，$d=\dfrac{t}{1-x}$，$a+b+c+d=\dfrac{t}{x}$，故 $\dfrac{1}{4-x}+\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1-x}$

$=\frac{1}{x}$，即 $5x^4-40x^3+105x^2-100x+24=0$.

令 $x=y+2$，则 $5(y+2)^4-40(y+2)^3+105(y+2)^2-100(y+2)+24=0$，即 $5y^4-15y^2+4=0$，解得 $y^2=\frac{15+\sqrt{145}}{10}$ 或 $y^2=\frac{15-\sqrt{145}}{10}$.

又 $0<x<1$，$x=y+2$，则 $-2<y<-1$，$1<y^2<4$. 而 $y^2=\frac{15-\sqrt{145}}{10}<1$，故应舍去.

由 $y^2=\frac{15+\sqrt{145}}{10}$，得 $y=-\frac{\sqrt{150+10\sqrt{145}}}{10}$ $\left(y=\frac{\sqrt{150+10\sqrt{145}}}{10}\right.$ 舍去).

故 $x=2-\frac{\sqrt{150+10\sqrt{145}}}{10}$.

$$
\begin{aligned}
&5\sqrt[5]{x(4-x)(3-x)(2-x)(1-x)}\\
&=5\sqrt[5]{y(2+y)(2-y)(1-y)(1-y)}\\
&=5\sqrt[5]{y(4-y^2)(1-y^2)}.
\end{aligned}
$$

因此，$4a+3b+2c+d$ 的最小值是 $5\sqrt[5]{y(4-y^2)(1-y^2)}$，其中 $y=-\frac{\sqrt{150+10\sqrt{145}}}{10}$.

类似题3 已知 $a,b,c,d,e\in\mathbf{R}^+$，且 $abcde(a+b+c+d+e)=1$，求 $5a+4b+3c+2d+e$ 的最小值.

解 设 x 为待定系数，且 $0<x<1$，则

$$
\begin{aligned}
&5a+4b+3c+2d+e\\
&=x(a+b+c+d+e)+(5-x)a+(4-x)b\\
&\quad+(3-x)c+(2-x)d+(1-x)e\\
&\geqslant 6\cdot\\
&\sqrt[6]{x(a+b+c+d+e)\cdot(5-x)a\cdot(4-x)b\cdot(3-x)c\cdot(2-x)d\cdot(1-x)e}\\
&=6\sqrt[6]{x(5-x)(4-x)(3-x)(2-x)(1-x)},
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x(a+b+c+d+e)=(5-x)a=(4-x)b=(3-x)c=(2-x)d=(1-x)e=t$ 时取等号.

即 $a=\frac{t}{5-x}$，$b=\frac{t}{4-x}$，$c=\frac{t}{3-x}$，$d=\frac{t}{2-x}$，$e=\frac{t}{1-x}$，$a+b+c+d+e=\frac{t}{x}$，故

$$\frac{1}{5-x}+\frac{1}{4-x}+\frac{1}{3-x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x},$$

$$6x^5-75x^4+340x^3-675x^2+548x-120=0,$$

$$(2x-5)(3x^4-30x^3+95x^2-100x+24)=0,$$

注意到 $0<x<1$，故 $x\neq\frac{5}{2}$，故

$$3x^4-30x^3+95x^2-100x+24=0.$$

令 $x=y+\frac{5}{2}$，则 $3\left(y+\frac{5}{2}\right)^4-30\left(y+\frac{5}{2}\right)^3+95\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-100\left(y+\frac{5}{2}\right)+24=0$，即 $48y^4-280y^2+259=0$，解得 $y^2=\frac{35+8\sqrt{7}}{12}$，或 $y^2=\frac{35-8\sqrt{7}}{12}$.

又 $0<x<1$，$x=y+\frac{5}{2}$，则 $-\frac{5}{2}<y<-\frac{3}{2}$，$\frac{9}{4}<y^2<\frac{25}{4}$. 而 $y^2=\frac{35-8\sqrt{7}}{12}<2$，故应舍去.

由 $y^2=\frac{35+8\sqrt{7}}{12}$，得 $y=-\frac{\sqrt{105+24\sqrt{7}}}{10}$ $\left(y=\frac{\sqrt{105+24\sqrt{7}}}{10}\right.$ 舍去).

故 $x=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{105+24\sqrt{7}}}{10}$.

$$
\begin{aligned}
&6\sqrt[6]{x(5-x)(4-x)(3-x)(2-x)(1-x)}\\
&=6\sqrt[6]{\left(\frac{5}{2}+y\right)\left(\frac{5}{2}-y\right)\left(\frac{3}{2}-y\right)\left(-\frac{3}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(-\frac{1}{2}-y\right)}\\
&=6\sqrt[6]{\left(\frac{25}{4}-y^2\right)\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)}.
\end{aligned}
$$

因此，$5a+4b+3c+2d+e$ 的最小值是 $6\sqrt[6]{\left(\frac{25}{4}-y^2\right)\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)}$，

其中 $y=-\frac{\sqrt{105+24\sqrt{7}}}{10}$.

有兴趣的读者，还可以进一步将变量的个数拓展到六元甚至更高元.

参考文献：

[1] 徐胜林. 解析2017年湖北省预赛试题第7题[J]. 数学通讯(下半月)，2017(6).

[2] 邹生书，邢宏大. 一道最小值预赛题求解的两种思路六解法[J]. 数学通讯(上半月)，2017(8).

(收稿日期：2019－12－15)

关于举办 2019 年数学奥林匹克教练员等级证书培训班的通知

为了帮助广大中学数学奥林匹克教练员拓宽知识面，提升数学资优生教育和竞赛培训水平，今年继续举办数学奥林匹克等级教练员培训班，有关事宜通知如下。

一、培训对象：中学数学教师(限额 150 名)。

二、培训时间：定于 2019 年 7 月 3 日报到，7 月 4 日至 7 月 9 日培训。

三、培训地点：湖北省武汉市华中师范大学数学与统计学学院(武昌珞喻路 152 号)。

四、证书发放：本期培训结束后，经考核合格将颁发“中国数学奥林匹克二级教练员证书”(该证书由湖北省数学竞赛组织委员会印制，加盖湖北省数学竞赛组织委员会公章)。

五、培训费用：2580 元/人。食宿自理(请参训老师自行提前预定酒店住宿)。

六、报名办法：2019 年 6 月 15 日前将电子版报名表(可到华中师范大学培训中心(职业与继续教育学院)：http://zjy.ccnu.edu.cn/及《数学通讯》网站：http://www.shuxuetongxun.com 下载)发送到联系人邮箱。以邮件发出时间为序，先到先报，满额截止，确定后发正式通知。

七、联系方式：

刘　淳(电话：13971533122；027-67867347；E-mail：liuchun@mail.ccnu.edu.cn)

余世桂(电话：15387158902；027-67867545；E-mail：yusg@mail.ccnu.edu.cn)

联系地址：湖北省武汉市华中师范大学培训中心　　　　　　邮政编码：430079

主办单位：华中师范大学培训中心

协办单位：华中师范大学数学竞赛与数学普及研究所

开展第十九届高中生数学论文竞赛的公告

2001 年至今，我刊已开展了十八届高中生数学论文竞赛，得到了广大中学师生的广泛关注，参赛论文中不乏优秀之作，部分获奖论文已在我刊“学生论坛”栏目刊出。为了反映学生的学习成果，鼓励学生的创新意识，支持中学生数学论文写作这一活动，我刊今年继续开展第十九届高中生数学论文竞赛，具体事项安排如下。

1. 选题范围

(1)学习心得　围绕高中数学教材中某一节、某一课或者某一题谈谈自己的学习体会，用具体的素材反映自己在学习过程中的心路历程。

(2)研究成果　以教材中的知识点为基础，通过类比、推广、想象等思维活动得到的“源于课本而又高于课本”的“新成果”。

(3)数学应用　用所掌握的数学知识解决现实生活中的实际问题，文章要有现实背景材料、具体数据、数学模型、解答过程和实际结果。

(4)问题争鸣　对一个问题与众不同的理解，对一道试题与众不同的解法，对某些知识的争鸣与辨析等。

2. 写作要求

(1)基本要求　主题明确，重点突出，内容精炼(以不超过 3000 字为宜)，表达准确流畅。

(2)读者定位　文章要有新意，所涉及的知识和方法不超过高考和高中竞赛的要求，适合高中生阅读。

(3)鼓励导向　欢迎不落俗套的短文，以培养创新意识为宗旨，鼓励内容和表达方式方面的创新。

3. 有关规定

(1)参赛论文可以是手写稿，也可以是打印稿，要求字迹工整，图形正确。

(2)请在论文首页注明以下基本情况：姓名，学校，年级，邮政编码，指导老师，联系电话。

(3)参赛论文务必于 2019 年 11 月 20 日前发送到电子邮箱：shxtxxuesh@163.com，或通过邮局邮寄到“430079，湖北武汉华中师范大学《数学通讯》编辑部”，并在信封上注明“高中生论文竞赛”字样。

4. 评奖事宜

本次数学论文竞赛由本刊相关编委组成评委会，评出特等奖 3～8 名，一等奖 30～60 名，二等奖若干名，获奖名单将在本刊和本刊网站公布，部分优秀获奖论文将安排在本刊刊出。向获奖者颁发获奖证书，向指导教师颁发优秀指导教师证书，领取证书时将适当收取工本费和邮寄费用。

《数学通讯》编辑部

邮发代号：38-23(下半月 教师)　刊号：ISSN 0488-7395　CN 42-1152/O1　定价：9.00 元