

高中数学反函数与反三角内容的教学研究

刘爱洁

建平世纪中学，上海 201204

摘要：本文以《关于高中数学反函数与反三角内容的教学思考》为题，通过对现有不同版本高中数学教材进行深入分析，探讨了反函数与反三角的教材分析、教材内容、教材习题等几个方面的一些问题。文章从教材前后学习顺序及教学角度出发，提出了一些个人建议，以期提高教学质量，同时也希望对高中数学反函数与反三角的教材内容学习具有一定的建设意义。

关键词：高中数学；反函数；反三角；教材分析；教学建议

中图分类号：G63

1 前景概述

函数是中学阶段贯穿高中数学三年学习的核心知识，体现了数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析的数学核心素养，但因为知识的抽象性也导致这一章节比较难于掌握的。函数学不好，对于后续的现代数学的学习都只能是一纸空谈。反函数是高中数学函数章节的学习内容之一，本节内容也是学生普遍认为较晦涩难懂的知识点。所以对于这一章节在教学中我们对现有的教材引入、例题、习题等几个方面进行分析和评价，并针对教材中可能存在的一些问题提出一些个人建议。而反三角是三角比和立体几何中求线线角、线面角及二面角角度求解的必修课，但教材内容引入比较直观，学生难于理解，教学开展不太顺利，本文仅代表个人的一些教学见解，如有不足之处，请见谅，希望通过本文可以提高学生对反函数教学内容的理解，以提高教学质量。

2 《反函数与反三角》高考内容分析

从近 5 年的高考真题可以看出，角度的求解是必考内容，其重要性不言而喻。但是，全国卷对于角度问题主要考查的是求解正弦值、余弦值，不涉及角度的表示和反三角问题；上海卷则侧重于角度的求解，

需要学生明白非特殊角的反三角如何求解和表达。

3 《反函数与反三角》教材分析思考

“反函数”一节是《高中数学》沪教版必修第一第五章 5.4 的内容，是一个选讲内容；在人教版教材中这一章节是在必修第四章 4.4 的探究与发现的内容，在苏教版、北师大版内容中基本无提及。反函数体现了函数与方程、特殊与一般的思想，通过这一节课的学习，可以让接受、理解反函数的概念及求解方法，又可以加深学生对函数基本概念的理解，还可以为反三角内容的教学做好准备，起到承上启下的作用。但是从内容上看，反函数是与指数函数、对数函数息息相关的，指数函数的定义域为对数函数的值域，指数函数的值域为对数函数的定义域，本节课的内容可以调整到《高中数学》沪教版必修第四章 4.4 的内容，让学生加深对反函数概念的理解与应用。

“反三角”一节只存在于沪教版必修二第六章 6.1.5 的内容，是一个必讲内容；苏教版、人教版、北师大版没有对反函数内容的引入。

国内主流的高中数学教材中，人教版、苏教版、北师大版在反函数和反三角函数的教学上确实表现出了一定的差异。这些版本在内容编排和考查点上有所

表 1 《反函数与反三角》高考内容表

地区 年份	上海			全国		
	2023	直四棱柱	线面垂直	二面角	三棱柱	线面垂直
2022	三棱锥	体积	线面角	四棱锥	线线垂直	线面角
2021	长方体	体积	线面角	直三棱柱	线线垂直	二面角
2020	圆柱体	表面积	线面角	圆锥	线面垂直	二面角
2019	长方体	线面角	点面距离	直四棱柱	线面平行	二面角

收稿日期：2024年01月04日

作者简介：刘爱洁（1988—），女，汉族，河北衡水人，研究生，上海市建平世纪中学教师，研究方向高中数学教学。

侧重,三者都认为三角函数的教学应集中在正弦值、余弦值等基础知识上,而对反函数与反三角函数的考查不做重点强调,其中涉及的内容相对较少。

人教版、苏教版、北师大版在反函数的教学上更倾向于浅尝辄止,即明确了解反函数的定义以及基本性质,并不深入探讨它们在三角函数领域中的应用。因此,学生在学习有关反三角函数的内容时,可能缺乏应用反函数思想进行理解和解决问题的训练,这容易导致对于反三角函数表示及其与相应角度之间关系的理解不够深刻,影响了学生对整个三角函数知识体系的掌握。与此相比,沪教版在教学反函数内容时采取了选讲的策略,它提供给关于反函数概念的认知,但并不要求学生系统地学习和应用这一知识点。这种情况下,学生在理解反三角函数时,往往无法将其与反函数理论结合起来使用,这不仅增加了学习难度,而且在教学过程中也使得向学生解释反三角函数与其角度之间复杂的关系成为一大挑战。在实际教学过程中,这种差异可能导致学生在遇到涉及反三角函数的高级题目时会感到困难,尤其是在理解以及将其应用于解题中。因此,对于教师来说,在使用这些版本教材进行教学时,需要额外注意如何高效传达反三角函数的概念和应用,以及如何设计教学策略来帮助学生对这些较为抽象的数学概念进行理解,从而提高其在高考等标准化考试中的表现。教师们可能需要花费更多的时间和精力来设计辅助教学材料和活动,让学生通过多种途径理解和掌握反三角函数的知识,以确保他们能够在高考中顺利应对相关题目^[1]。

针对沪教版教材与高考反三角函数内容的考查不一致问题,改进教学内容设置是必要的。如果高考持续考察反三角函数,那么应该考虑将反函数内容纳入必修范围。这样的安排可以使得学生通过反函数的一般知识学习,更深入理解反三角函数的本质和图像,从而在遇到相关问题时,能够更加自信和准确地解答。将反函数与反三角函数的教学内容调整为必学,有利于确保学生在全面理解三角函数的基础上,掌握它们各自的逆运算,提升解题的整体能力。同时,教师可以通过举例、实际应用案例或是构建直观的几何模型等多种教学方式,帮助学生直观感受到反函数和反三角函数之间的内在联系,增强它们的理解。另一种方案是,将反函数和反三角函数的内容设置为探究性学习或阅读材料。这样的设置不仅可以提高学生的数学

知识拓展面,激发学生的探究兴趣,同时也避免了由于增加考查点导致的教学难度提升。探究性学习可以激发学生的好奇心和求知欲,通过问题解决和案例探究活动,培养学生的批判性思维和自我学习能力。不管选择哪种改进策略,关键在于要通过合理的教学方法,确保学生对重要概念有深入的理解,同时保持教学内容与考试大纲的一致性,以免学生在面对高考时产生困惑。通过这样的教育改进,学生能够在不增加过多考查压力的情况下,更好地应对数学考试,并在日后学习和生活中发挥所学的三角函数知识。

4 《反函数与反三角》教材内容思考

本部分主要从教材内容引入,教材内容例题和教材内容习题三个角度进行分析,分析的内容来源主要是沪教版必修一反函数概念的教学内容和必修二反三角这一章节部分,其他版本教材反函数为选讲内容,反三角未涉及。

4.1 教材内容引入分析

在沪教版数学教材中,反函数的教学主要集中在两个课时,这两个课时分别专注于反函数的基本概念和它们的图像表达。教学的核心要点是确保学生正确理解什么是反函数,以及如何和一些基本情况下求得一个给定函数的反函数。通过这一过程,学生会学习到函数与其对应的反函数之间的基本关系,包括它们在坐标轴上图像的对称性——这一点是理解反函数的关键。学生需要掌握,对于函数 $f(x)$ 及其反函数 $f^{-1}(x)$,它们的图像在 $y=x$ 这条直线上是轴对称的。教师在授课时应强调这一对称性质,以便学生通过图像直观理解反函数的概念,这样有助于在后续的学习中能够更加容易地识别和运用反函数。通过合理分配课时和细心讲解这些概念,教师能够使得学生在不增加学习负担的前提下,有效掌握反函数的知识点。

反函数概念的引入是通过对华氏度与摄氏度的对比,函数 $y = 1.8x + 32$ 与

$$x = \frac{y - 32}{1.8}$$

的关系来分析引入,通过总结得到反函数的概念,并且让学生充分体现到原函数与反函数的关系,它们的定义域与值域互相交换,对应法则互逆的原则,为反函数与原函数图像的求解做了良好的铺垫。

反三角的教材引入主要体现的是特殊与一般的思

想,先由

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

求解锐角

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

再根据诱导公式 $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ 求解出

$$\alpha = \frac{5\pi}{6}$$

然后再根据诱导公式 $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ 解得

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

或

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

此引入具有一定的特点,从特殊角归纳特点到所有的角度,这一过程有一定的抽象性,对于某些学生而言,理解这一过程需要可逆思想和总结归纳的思想,需要对于三角公式之间的转换灵活掌握,才能得到 $\sin x = \sin\alpha$ 这种非特殊角的结论,所以在教学过程中,学生对于这一块内容的理解难度较大,教学内容难以顺利开展,所以本部分在教学中可以改为

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

在 $[0, 2\pi]$, $[2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ 的解集,然后根据解集的情况再其归纳总结为一体,学生更容易接受与理解。如果学生学习了反函数,通过原三角函数的图像来求解学生的理解也会更好一些。反三角其后直接归纳 $\cos x = \cos\alpha$, $\tan x = \tan\alpha$ 的结论,这两个的结论与 $\sin x = \sin\alpha$ 略有不同,学生以此及彼的情况不太乐观,导致课程内容较难开展,而从反函数图像角度来考虑对学生来说更直观,跟容易接受。

4.2 教材内容例题分析

反函数例题1主要求解 $f(x) = \log_2 x$ 反函数 $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(a)$ 的值,体现函数与反函数的对应关系。例题2求解一次函数、二次函数、分式函数的反函数,熟悉求解函数的一般过程。例题3主要研究函数与反函数图像之间的关系,例题4将反函数的奇偶性、增减性与反函数相关联,前3个例题主要是反函数的关系,求解思路与图像之间的关系,但第4个例题增加了函数性质之间内容的抽象性,可以将第4个例题修改为习题5.4B组的内容,增加学生的计算能力与思考能力。

反三角只有两个例题,例题1直接考查学习内容,可以套结论,但例题2引入

$$\sin 2x, \cos(x + \frac{\pi}{6}), \tan(2x + \frac{\pi}{3})$$

提升了一定的难度,并且将学习内容进行升华,让学生学会举一反三,用整体的思想解决问题。例题的难度与深度比较符合学生的学情,密切贴合学习内容。

4.3 教材内容习题分析

反函数这一章节习题只有5.4,习题1主要为反函数与原函数的求解关系,习题2和3求解不同函数幂函数、分式函数、二次函数、指数函数、对数函数这些常见函数的反函数,每一个习题代表一个常见函数类型,习题面广而全,习题4-6也为反函数与原函数的求解关系,整个习题难度较小,没有体现原函数与反函数的图像关系,也没有体现例题4中反函数性质奇偶性、增减性与原函数的关系,所以章节的习题如若把例题4改为习题5.4的B组习题内容,可以更多的增加学生学习力与理解力。

反三角的章节习题^[2]主要集中于角度的求解,相比于例题而言,增加了一些难度,例题主要是正角的求解,习题中负角的求解比较多,可以让学生体会到知识的细节变化,不能只记结论,需要研究知识之间的紧密关系,这一点学生的能力确实薄弱一些,习题设置合理。

5 结果与讨论

本文主要采用文献资料分析和实际教学观察的方法,对现有的高中数学沪教版教材中反函数与反三角内容的教材内容、特点和不足进行了分析^[3]。

首先,我们对现有的高中数学教材进行了梳理和评价,包括人教版、苏教版、北师大版等目前高中生所学习的主流版本教材,发现基本所有版本教材将反函数这一章节作为选讲或者阅读材料内容,只有沪教版教材讲反三角这一部分内容。高考全国卷对于角度的考查侧重于正弦、余弦、正切的求解,但上海高考卷对于角度的考查侧重于角度的求解与表示也就是反三角的内容。

其次,对于沪教版教材的反函数和反三角内容进行深入分析可以看出,反函数章节的教教学引入、教学例题、教学习题都比较合理,循序渐进,符合学生的学情。但反三角章节从特殊到一般,可逆思想的应用,和对于反三角的表示也比较生硬一些,导致学生对于这一块内容理解难度较大,教材的例题和练习题

形式多样化,但由于内容较难理解,学生难以达到灵活应用的目的,难度不够多样化,无法满足不同层次学生的学习需求,这可能导致一些优秀的学生无法得到足够的挑战和提高,而一些较差的学生则无法跟上教学进度,沪教教材因选讲反函数,所以对于反三角的讲解不可直接应用反函数概念加深学生的理解,导致学生的知识稍微有些脱节,对这一块的概念和方法应用不够清晰。

针对这些问题,我提出了一些个人建议。首先,建议教材编写者对于反函数和反三角这块内容的前后编排和内容的呼应性更加重视,没有反函数直接用反三角的定义,前后知识的连贯性弱写,如若可以将反函数与反三角结合起来教学,可以让学生更好地理解 and 掌握这两块的知识 and 内容,或者将反函数和反三角

均作为自学内容,在高考考查中可以侧重考查对于角度的正弦、余弦、正切值的考查。其次,建议增加难度适中的例题和练习题,以满足不同层次学生的学习需求。最后,建议加强对概念和方法的解释,使用更多的实例和图形来帮助学生理解和掌握^[4]。

6 结论

本文对现有高中数学教材中反函数与反三角的高考考查重点和教材特点内容进行了分析和评价,并提出了一些目前个人教学中所总结出来的改进建议。目前可以看出,教材在内容安排、例题和练习题选择、概念和方法解释等方面存在一些不足,希望本篇文章可以有助于提高学生对反函数与反三角的理解和掌握程度,从而提高教学质量。

参考文献

- [1]王丽,张华.高中数学教材中反函数与反三角函数的内容安排及其优化建议[J].教育教学论坛,2017(49):230-231.
- [2]张杰,李明.高中数学教材中反三角函数的例题和练习题选择研究[J].数学学习与研究,2018(17):4.
- [3]周晓.高中数学反函数问题综述[J].数学通报,2003(5):21-23.
- [4]卫福山.反函数学习中常见问题及剖析[J].中学生数学,2010(401):7-8.
- [5]陶印修,徐云.微积分中变与不变视角下的反函数教学研究[J].商情,2018(16):248.