## 10.1.2　两角和与差的正弦

学习目标　1.了解两角和与差的正弦和两角和与差的余弦间的关系.2.会推导两角和与差的正弦公式，掌握公式的特征.3.能运用公式进行三角函数的有关化简求值．

知识点　两角和与差的正弦

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称 | 简记符号 | 公式 | 使用条件 |
| 两角和的正弦 | S(*α*＋*β*) | sin(*α*＋*β*)＝sin *α*cos *β*＋cos *α*sin *β* | *α*，*β*∈**R** |
| 两角差的正弦 | S(*α*－*β*) | sin(*α*－*β*)＝sin *α*cos *β*－cos *α*sin *β* | *α*，*β*∈**R** |

记忆口诀：“正余余正，符号相同”．

1．sin 14°cos 16°＋cos 14°cos 74°等于(　　)

A．－ B．－ C. D.

答案　C

解析　sin 14°cos 16°＋cos 14°cos 74°＝sin 14°cos 16°＋cos 14°sin 16°＝sin 30°＝.

2．sin ＝ .

答案

解析　sin ＝sin

＝sin cos ＋cos sin

＝×＋×＝.

3．若cos *α*＝－，*α*是第三象限角，则sin＝ .

答案　－

解析　∵cos *α*＝－，*α*是第三象限角，

∴sin *α*＝－＝－，

∴sin＝sin *α*－cos *α*

＝×－×＝－.

4.sin 15°＋cos 15°＝ .

答案

解析　原式＝sin 15°·cos 30°＋cos 15°·sin 30°＝sin(15°＋30°)＝sin 45°＝.

一、给值(式)求值

例1　(1)已知*α*，*β*都是锐角，且sin *α*＝，sin(*α*－*β*)＝，求sin *β*的值．

解　∵*α*为锐角，且sin *α*＝，

∴cos *α*＝＝，

∵*α*，*β*都是锐角，

∴－<*α*－*β*<，

又sin(*α*－*β*)＝，

∴cos(*α*－*β*)＝＝，

∴sin *β*＝sin[*α*－(*α*－*β*)]＝sin *α*cos(*α*－*β*)－cos *α*·sin(*α*－*β*)＝×－×＝.

(2)已知<*β*<*α*<，cos(*α*－*β*)＝，sin(*α*＋*β*)＝－，求sin 2*α*的值．

解　∵<*β*<*α*<，

∴－<－*β*<－，

又*β*<*α*，

∴0<*α*－*β*<，π<*α*＋*β*<.

∴sin(*α*－*β*)＝

＝＝，

cos(*α*＋*β*)＝－

＝－＝－.

∴sin 2*α*＝sin[(*α*－*β*)＋(*α*＋*β*)]

＝sin(*α*－*β*)cos(*α*＋*β*)＋cos(*α*－*β*)sin(*α*＋*β*)

＝×＋×＝－，

即sin 2*α*＝－.

反思感悟　给值(式)求值的策略

(1)当“已知角”有两个时，“所求角”一般表示为两个“已知角”的和或差的形式．

(2)当“已知角”有一个时，此时应着眼于“所求角”或特殊角与“已知角”的和或差的关系，然后应用诱导公式把“所求角”变成“已知角”．

跟踪训练1　(1)已知cos＝(*α*为锐角)，则sin *α*等于(　　)

A. B.

C. D.

答案　D

解析　因为*α*∈，cos＝>0，

所以*α*＋∈.

所以sin＝

＝＝.

所以sin *α*＝sin

＝sincos －cossin

＝×－×＝.

(2)化简：＝ .

答案

解析

＝

＝

＝

＝sin 30°＝.

二、给值求角

例2　已知cos *α*＝，sin(*α*＋*β*)＝，0<*α*<，0<*β*<，求角*β*的值．

解　因为0<*α*<，cos *α*＝，

所以sin *α*＝.

又因为0<*β*<，

所以0<*α*＋*β*<π.

因为sin(*α*＋*β*)＝<sin *α*，

所以cos(*α*＋*β*)＝－，

所以sin *β*＝sin[(*α*＋*β*)－*α*]＝sin(*α*＋*β*)cos *α*－cos(*α*＋*β*)sin *α*

＝×－×＝.

又因为0<*β*<，所以*β*＝.

反思感悟　解决给值求角问题的方法

解决此类题目的关键是求出所求角的某一三角函数值，而三角函数的选取一般要根据所求角的范围来确定，当所求角的范围是(0，π)或(π，2π)时，选取求余弦值，当所求角范围是或时，选取求正弦值．

跟踪训练2　已知*α*，*β*均为锐角，且sin *α*＝，cos *β*＝，求*α*－*β*的值．

解　因为*α*，*β*均为锐角，

且sin *α*＝，cos *β*＝，

所以cos *α*＝，sin *β*＝.

所以sin(*α*－*β*)＝sin *α*cos *β*－cos *α*sin *β*＝×－×＝－.

又因为*α*，*β*均为锐角，所以－<*α*－*β*<.

故*α*－*β*＝－.

三、两角和与差的正弦、余弦公式的应用

例3　(1)(多选)*f*(*x*)＝sin 2*x*－cos 2*x*，则*f*(*x*)在下列区间上是增函数的是(　　)

A. B.

C. D.

答案　BC

解析　*f*(*x*)＝sin 2*x*－cos 2*x*

＝

＝sin.

令－＋2*k*π≤2*x*－≤＋2*k*π，*k*∈**Z**，

整理得－＋*k*π≤*x*≤＋*k*π，*k*∈**Z**，

所以*f*(*x*)的增区间为，*k*∈**Z**.

经检验B，C正确．

(2)若方程sin *x*－cos *x*＝*m*－1有解，则*m*的取值范围是 ．

答案　[－1,3]

解析　sin *x*－cos *x*＝*m*－1，

即2＝*m*－1，

即2sin＝*m*－1，

∵sin∈[－1,1]，

∴－2≤*m*－1≤2，

即－1≤*m*≤3.

反思感悟　(1)对形如sin *α*±cos *α*，sin *α*±cos *α*的三角函数式均可利用特殊角的关系，运用和、差角正弦、余弦公式化简为含一个三角函数式的形式，即*y*＝*A*sin(*α*＋*φ*)的形式．

(2)辅助角公式

*a*sin *x*＋*b*cos *x*＝，

令cos *φ*＝，sin *φ*＝，则有*a*sin *x*＋*b*cos *x*＝(cos *φ*sin *x*＋sin *φ*cos *x*)＝sin(*x*＋*φ*)，其中tan *φ*＝，*φ*为辅助角．

跟踪训练3　(1)已知sin＝，则cos *x*＋cos的值为(　　)

A．－ B. C．－ D.

答案　B

解析　cos *x*＋cos

＝cos *x*＋cos *x*＋sin *x*

＝cos *x*＋sin *x*

＝sin＝.

(2)函数*y*＝cos *x*＋cos的最小值是 ，最大值是 ．

答案　－

解析　*y*＝cos *x*＋cos *x*cos －sin *x*sin

＝cos *x*－sin *x*＝

＝cos，

当cos＝－1时，*y*min＝－.

当cos＝1时，*y*max＝.

两角和与差的正弦的证明问题

典例　(1)证明：sin *α*cos *β*＝[sin(*α*＋*β*)＋sin(*α*－*β*)](*α*，*β*∈**R**)；

(2)证明：sin(*α*＋*β*)cos *α*－[sin(2*α*＋*β*)－sin *β*]＝sin *β*.

证明　(1)对任意*α*，*β*∈**R**，sin(*α*＋*β*)＝sin *α*cos *β*＋cos *α*sin *β*，sin(*α*－*β*)＝sin *α*cos *β*－cos *α*sin *β*，

两式相加，得sin(*α*＋*β*)＋sin(*α*－*β*)＝2sin *α*cos *β*，

∴sin *α*·cos *β*＝[sin(*α*＋*β*)＋sin(*α*－*β*)]．

(2)左边＝sin(*α*＋*β*)cos *α*－[sin(*α*＋*α*＋*β*)－sin(*α*＋*β*－*α*)]

＝sin(*α*＋*β*)cos *α*－[sin *α*cos(*α*＋*β*)＋cos *α*·sin(*α*＋*β*)－sin(*α*＋*β*)·cos *α*＋cos(*α*＋*β*)sin *α*]

＝sin(*α*＋*β*)cos *α*－×2sin *α*cos(*α*＋*β*)

＝sin(*α*＋*β*)cos *α*－cos(*α*＋*β*)sin *α*

＝sin(*α*＋*β*－*α*)

＝sin *β*

＝右边．

∴原等式成立．

[素养提升]　(1)证明三角恒等式的方法

①从较复杂的一边证向较简单的一边；

②从两边着手，证明等式的左、右两边等于同一个数或式子；

③比较法：作差(或作商)，左边－右边＝0.

(2)通过两角和与差的正弦公式的变形应用，培养逻辑推理的核心素养．

1．sin 7°cos 37°－sin 83°sin 37°的值为(　　)

A．－ B．－ C. D.

答案　B

解析　原式＝sin 7°cos 37°－cos 7°sin 37°＝sin(－30°)＝－sin 30°＝－.

2．设*α*∈，若sin *α*＝，则2sin等于(　　)

A. B. C. D．2

答案　A

解析　因为*α*∈，*α*是第一象限角，根据sin2*α*＋cos2*α*＝1，其中sin *α*>0，cos *α*>0，可得cos *α*＝，又根据两角和的正弦公式得

sin＝sin *α*cos ＋sin cos *α*＝sin *α*＋cos *α*＝×＋×＝，

所以2sin＝.

3．已知cos(*α*－*β*)＝，sin *β*＝－，且*α*∈，*β*∈，则sin *α*等于(　　)

A. B. C．－ D．－

答案　A

解析　∵∴0<*α*－*β*<π.

又cos(*α*－*β*)＝，

∴sin(*α*－*β*)＝＝.

∵－<*β*<0，sin *β*＝－，∴cos *β*＝，

∴sin *α*＝sin[(*α*－*β*)＋*β*]＝sin(*α*－*β*)cos *β*＋cos(*α*－*β*)sin *β*＝.

4．计算：cos －sin ＝ .

答案

解析　cos －sin

＝2

＝2sin

＝2sin

＝.

5．函数*f*(*x*)＝sin *x*－cos的值域为 ．

答案　[－，]

解析　*f*(*x*)＝sin *x*－cos *x*＋sin *x*

＝＝sin，

因为*x*∈**R**，所以*x*－∈**R**，

所以*f*(*x*)∈[－，]．

1．知识清单：

(1)公式的推导．

(2)给式求值、给值求值、给值求角．

(3)公式的正用、逆用、变形用．

2．方法归纳：构造法．

3．常见误区：求值或求角时忽略角的范围．

1．sin 10°cos 20°＋sin 80°sin 20°等于(　　)

A．－ B．－ C. D.

答案　C

解析　sin 10°cos 20°＋sin 80°sin 20°

＝sin 10°cos 20°＋cos 10°sin 20°

＝sin(10°＋20°)＝sin 30°＝.

2．(多选)cos *α*－sin *α*化简的结果可以是(　　)

A.cos B．2cos

C.sin D．2sin

答案　BD

解析　cos *α*－sin *α*＝2

＝2

＝2cos＝2sin.

3．在△*ABC*中，*A*＝，cos *B*＝，则sin *C*等于(　　)

A. B．－ C. D．－

答案　A

解析　因为cos *B*＝且0<*B*<π，

所以sin *B*＝.又*A*＝，

所以sin *C*＝sin(*A*＋*B*)＝sin cos *B*＋cos sin *B*

＝×＋×＝.

4．函数*f*(*x*)＝sin＋sin，则*f*(*x*)的奇偶性为(　　)

A．奇函数 B．偶函数

C．既是奇函数又是偶函数 D．非奇非偶函数

答案　A

解析　*f*(*x*)＝sin＋sin＝sin *x*＋cos *x*＋sin *x*－cos *x*＝sin *x*.

∴*f*(*x*)为奇函数．

5．若*α*是锐角，且满足sin＝，则sin *α*的值为(　　)

A. B. C. D.

答案　B

解析　因为*α*是锐角，且sin＝>0，

所以*α*－也为锐角，

所以cos＝＝＝，sin *α*＝sin＝sincos ＋cossin ＝×＋×＝.

6．已知sin *α*＝－，*α*∈，cos *β*＝－，*β*∈，则cos(*α*＋*β*)＝ ，sin(*α*＋*β*)＝ .

答案

解析　由题意得cos *α*＝－，sin *β*＝，

所以cos(*α*＋*β*)＝cos *α*cos *β*－sin *α*sin *β*＝×－×＝，

sin(*α*＋*β*)＝sin *α*cos *β*＋cos *α*sin *β*＝×＋×＝.

7．形如的式子叫作行列式，其运算法则为＝*ad*－*bc*，则行列式 的值是 ．

答案　－1

解析　＝sin 15°－cos 15°

＝2

＝2sin(15°－45°)

＝2sin(－30°)

＝－1.

8．已知sin *α*＋cos *β*＝1，cos *α*＋sin *β*＝0，则sin(*α*＋*β*)＝ .

答案　－

解析　∵sin *α*＋cos *β*＝1，cos *α*＋sin *β*＝0，

∴sin2*α*＋cos2*β*＋2sin *α*cos *β*＝1，①

cos2*α*＋sin2*β*＋2cos *α*sin *β*＝0，②

①②两式相加可得sin2*α*＋cos2*α*＋sin2*β*＋cos2*β*＋2(sin *α*cos *β*＋cos *α*sin *β*)＝1，

∴sin(*α*＋*β*)＝－.

9．已知*α*∈.

(1)若sin *α*＝，求sin的值；

(2)若cos＝，求sin *α*的值．

解　(1)因为sin *α*＝，*α*∈，所以cos *α*＝，

所以sin＝sin *α*＋cos *α*＝＋＝.

(2)因为*α*∈，所以*α*＋∈，

又因为cos＝，所以sin＝，

所以sin *α*＝sin＝sin－cos＝－＝.

10．证明：－2cos(*α*＋*β*)＝.

证明　左边＝

＝

＝＝

＝右边，

所以－2cos(*α*＋*β*)＝.

11．在△*ABC*中，如果sin *A*＝2sin *C*cos *B*，那么这个三角形是(　　)

A．锐角三角形 B．直角三角形

C．等腰三角形 D．等边三角形

答案　C

解析　∵*A*＋*B*＋*C*＝π，∴*A*＝π－(*B*＋*C*)，

由已知可得sin(*B*＋*C*)＝2sin *C*cos *B*

⇒sin *B*cos *C*＋cos *B*sin *C*＝2sin *C*cos *B*

⇒sin *B*cos *C*－cos *B*sin *C*＝0⇒sin(*B*－*C*)＝0.

∵0<*B*<π，0<*C*<π，

∴－π<*B*－*C*<π.

∴*B*＝*C*.故△*ABC*为等腰三角形．

12．已知cos＋sin *α*＝，则sin的值为(　　)

A．－ B.

C．－ D.

答案　C

解析　∵cos＋sin *α*＝，

∴cos *α*cos ＋sin *α*sin ＋sin *α*＝，

∴cos *α*＋sin *α*＝，即cos *α*＋sin *α*＝，

∴sin＝.

∴sin＝－sin＝－.

13．计算：(tan 10°－)·＝ .

答案　－2

解析　原式＝(tan 10°－tan 60°)·

＝·

＝·

＝－·

＝－

＝－2.

14．如图，在边长为1的正方形*ABCD*中，*P*，*Q*分别为边*BC*，*CD*上的点，且△*PCQ*的周长为2，则线段*PQ*长度的最小值是 ．

答案　2－2

解析　设∠*CPQ*＝*θ*，

则*CP*＝*PQ*cos *θ*，*CQ*＝*PQ*sin *θ*，又△*PCQ*的周长为2，

则*PQ*＝＝，

则当*θ*＋＝，即*θ*＝时，*PQ*取得最小值，

即*PQ*min＝＝2－2.

15．在△*ABC*中，3sin *A*＋4cos *B*＝6,3cos *A*＋4sin *B*＝1，则*C*的大小为(　　)

A. B.

C.或 D.或

答案　A

解析　由题意知

①2＋②2得9＋16＋24sin(*A*＋*B*)＝37.

则sin(*A*＋*B*)＝.

∴在△*ABC*中，sin *C*＝，

∴*C*＝或*C*＝.

若*C*＝，则*A*＋*B*＝，

∴1－3cos *A*＝4sin *B*>0.

∴cos *A*<.又<，∴*A*>.

此时*A*＋*C*>π，不符合题意，

∴*C*≠，∴*C*＝.

16．已知函数*f*(*x*)＝sin 2*x*＋cos 2*x*＋.

(1)求函数*f*(*x*)的最小正周期；

(2)求函数*f*(*x*)的对称轴和对称中心．

解　(1)函数*f*(*x*)＝sin 2*x*＋cos 2*x*＋

＝2＋

＝2sin＋，

故它的最小正周期为＝π.

(2)令2*x*＋＝*k*π＋，*k*∈**Z**，得*x*＝＋，*k*∈**Z**，故函数*f*(*x*)的对称轴为*x*＝＋，*k*∈**Z**.

令2*x*＋＝*k*π，*k*∈**Z**，得*x*＝－，*k*∈**Z**，故函数*f*(*x*)的对称中心为，*k*∈**Z**.