## 9.3.3　向量平行的坐标表示

学习目标　1.理解用坐标表示的向量平行的条件.2.能根据向量的坐标，判断向量是否共线.3.掌握三点共线的判断方法．

知识点　向量平行的坐标表示

1．向量平行的坐标表示

一般地，设向量***a***＝(*x*1，*y*1)，***b***＝(*x*2，*y*2)，***a***≠**0**，则***a***∥***b***⇔*x*1*y*2－*x*2*y*1＝0.

2．若＝*λ*，则*P*与*P*1，*P*2三点共线．

(1)当*λ*∈(0，＋∞)时，*P*位于线段*P*1*P*2的内部，特别地，当*λ*＝1时，*P*为线段*P*1*P*2的中点．

(2)当*λ*∈(－∞，－1)时，*P*在线段*P*1*P*2的延长线上．

(3)当*λ*∈(－1,0)时，*P*在线段*P*1*P*2的反向延长线上．

1．若向量***a***＝(*x*1，*y*1)，***b***＝(*x*2，*y*2)，且***a***∥***b***，则＝.(　×　)

2．若向量***a***＝(*x*1，*y*1)，***b***＝(*x*2，*y*2)，且*x*1*y*1－*x*2*y*2＝0，则***a***∥***b***.(　×　)

3．若向量***a***＝(*x*1，*y*1)，***b***＝(*x*2，*y*2)，且*x*1*y*2－*x*2*y*1＝0，则***a***∥***b***.(　√　)

4．向量***a***＝(1,2)与向量***b***＝(4,8)共线．(　√　)

一、向量共线的判定

例1　(多选)下列向量组中，能作为平面内所有向量基底的是(　　)

A．***a***＝(－2,3)，***b***＝(4,6)

B．***a***＝(2,3)，***b***＝(3,2)

C．***a***＝(1，－2)，***b***＝(7,14)

D．***a***＝(－3,2)，***b***＝(6，－4)

答案　ABC

解析　能作为平面内的基底，则两向量***a***与***b*** 不平行，A选项，(－2)×6－3×4＝－24≠0，∴***a***与***b***不平行；

B选项，2×2－3×3＝4－9＝－5≠0，∴***a***与***b***不平行；

C选项，1×14－(－2)×7＝28≠0，∴***a***与***b***不平行；

D选项，(－3)×(－4)－2×6＝12－12＝0，∴***a***∥***b***.

反思感悟　向量共线的判定应充分利用向量共线定理或向量共线的坐标表示进行判断，特别是利用向量共线的坐标表示进行判断时，要注意坐标之间的搭配．

跟踪训练1　已知*A*(－1，－1)，*B*(1,3)，*C*(2,5)，判断与是否共线？如果共线，它们的方向相同还是相反？

解　因为＝(1－(－1)，3－(－1))＝(2,4)，＝(2－(－1)，5－(－1))＝(3,6)，

因为2×6－3×4＝0，

所以∥，所以与共线．

又＝，所以与的方向相同．

二、由向量平行(共线)求参数的值

例2　已知***a***＝(1,2)，***b***＝(－3,2)，当*k*为何值时，*k****a***＋***b***与***a***－3***b***平行？

解　方法一　*k****a***＋***b***＝*k*(1,2)＋(－3,2)＝(*k*－3,2*k*＋2)，

***a***－3***b***＝(1,2)－3(－3,2)＝(10，－4)，

当*k****a***＋***b***与***a***－3***b***平行时，存在唯一实数*λ*，

使*k****a***＋***b***＝*λ*(***a***－3***b***)．

由(*k*－3,2*k*＋2)＝*λ*(10，－4)．

得解得*k*＝*λ*＝－.

方法二　由方法一知*k****a***＋***b***＝(*k*－3,2*k*＋2)，

***a***－3***b***＝(10，－4)，

∵*k****a***＋***b***与***a***－3***b***平行，

∴(*k*－3)×(－4)－10(2*k*＋2)＝0，解得*k*＝－.

延伸探究

若本例条件不变，判断当*k****a***＋***b***与***a***－3***b***平行时，它们是同向还是反向？

解　由本例知当*k*＝－时，*k****a***＋***b***与***a***－3***b***平行，

这时*k****a***＋***b***＝－***a***＋***b***＝－(***a***－3***b***)，

∵*λ*＝－<0，∴*k****a***＋***b***与***a***－3***b***反向．

反思感悟　根据向量共线条件求参数问题，一般有两种思路，一是利用向量共线定理***a***＝*λ****b***(***b***≠**0**)，列方程组求解，二是利用向量共线的坐标表达式*x*1*y*2－*x*2*y*1＝0求解．

跟踪训练2　设向量***a***＝(1,2)，***b***＝(2,3)，若向量*λ****a***＋***b***与向量***c***＝(－4，－7)平行，则*λ*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　2

解析　*λ****a***＋***b***＝*λ*(1,2)＋(2,3)＝(*λ*＋2,2*λ*＋3)，

∵*λ****a***＋***b***与***c***平行，

∴(*λ*＋2)×(－7)－(2*λ*＋3)×(－4)＝*λ*－2＝0，

∴*λ*＝2.

三、三点共线问题

例3　已知*A*(1，－3)，*B*，*C*(9,1)，求证：*A*，*B*，*C*三点共线．

证明　＝＝，＝(9－1,1＋3)＝(8,4)，

∵7×4－×8＝0，

∴∥，且*AB*，有公共点*A*，

∴*A*，*B*，*C*三点共线．

反思感悟　(1)三点共线问题的实质是向量共线问题，两个向量共线只需满足方向相同或相反，两个向量共线与两个向量平行是一致的，利用向量平行证明三点共线需分两步完成：①证明向量平行；②证明两个向量有公共点．

(2)若*A*，*B*，*C*三点共线，即由这三个点组成的任意两个向量共线．

跟踪训练3　已知向量＝(*k*,12)，＝(4,5)，＝(10，*k*)．当*k*为何值时，*A*，*B*，*C*三点共线？

解　＝－＝(4－*k*，－7)，

＝－＝(10－*k*，*k*－12)，

若*A*，*B*，*C*三点共线，则∥，

∴(4－*k*)(*k*－12)＝－7×(10－*k*)，

解得*k*＝－2或11，

又，有公共点*A*，

∴当*k*＝－2或11时，*A*，*B*，*C*三点共线．

1．(多选)下列各组向量中，共线的是(　　)

A．***a***＝(－1,2)，***b***＝(－2,4)

B．***a***＝(－3,2)，***b***＝(6，－4)

C．***a***＝，***b***＝(10,5)

D．***a***＝(0，－1)，***b***＝(3,1)

答案　AB

解析　利用平面向量共线的坐标表示可知，AB满足题意．

2．已知向量***a***＝(2，－1)，***b***＝(*x*－1,2)，若***a∥b***，则实数*x*的值为(　　)

A．2 B．－2

C．3 D．－3

答案　D

解析　因为***a∥b***，

所以2×2－(－1)×(*x*－1)＝0，

解得*x*＝－3.

3．与***a***＝(3,4)平行的单位向量为(　　)

A.

B.或

C.或

D.

答案　C

解析　设与***a***平行的单位向量为***e***＝(*x*，*y*)，

则∴或

4．若点*A*(－2,0)，*B*(3,4)，*C*(2，*a*)共线，则*a*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案

解析　＝(5,4)，＝(4，*a*)，因为*A*，*B*，*C*三点共线，所以∥，故5*a*－16＝0，所以*a*＝.

5．已知向量***a***＝(1，*λ*)，***b***＝(2,1)，***c***＝(1，－2)，若向量2***a***＋***b***与***c***共线，则*λ*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－

解析　因为向量***a***＝(1，*λ*)，***b***＝(2,1)，***c***＝(1，－2)，

所以2***a***＋***b***＝(4,2*λ*＋1)，

由2***a***＋***b***与***c***共线得－8－(2*λ*＋1)＝0，

解得*λ*＝－.

1．知识清单：

(1)向量共线的判定．

(2)由向量平行求参数的值．

(3)三点共线问题．

2．方法归纳：化归与转化．

3．常见误区：两个向量共线的坐标表示的公式易记错．

1．已知向量***a***＝(2，－1)，***b***＝，则***a***与***b***(　　)

A．垂直 B．平行且同向

C．平行且反向 D．不垂直也不平行

答案　C

解析　∵向量***a***＝(2，－1)，***b***＝，∴***a***＝－3***b***，∴***a***与***b***平行且反向．

2．已知向量***a***＝(3,5)，***b***＝(cos *α*，sin *α*)，且***a***∥***b***，则tan *α*等于(　　)

A. B. C．－ D．－

答案　B

解析　由***a***∥***b***，得5cos *α*－3sin *α*＝0，则＝，

即tan *α*＝.

3．***a***＝(1，－2)，***b***＝(2,1)，满足与向量***a***＋***b***平行的一个向量是(　　)

A．(2，－4) B．(4,2)

C．(－1，－3) D．(6，－2)

答案　D

解析　由已知得***a***＋***b***＝(3，－1)，

由于≠，≠，≠，＝.只有D满足题意．

4．(多选)在下列向量组中，不能表示向量***a***＝(－3,7)的是(　　)

A．***e***1＝(0,1)，***e***2＝(0，－2)

B．***e***1＝(1,5)，***e***2＝(－2，－10)

C．***e***1＝(－5,3)，***e***2＝(－2,1)

D．***e***1＝(7,8)，***e***2＝(－7，－8)

答案　ABD

解析　因为A，B，D中两个向量都共线，而C中两向量不共线，故C可以把向量***a***＝(－3,7)表示出来，A，B，D不可以．

5．若*A*(4,3)，*B*(5，*m*)，*C*(6，*n*)三点在一条直线上，则下列式子一定正确的是(　　)

A．2*m*－*n*＝3 B．*n*－*m*＝1

C．*m*＝3，*n*＝5 D．*m*－2*n*＝3

答案　A

解析　因为*A*(4,3)，*B*(5，*m*)，*C*(6，*n*)三点在一条直线上，＝(1，*m*－3)，＝(2，*n*－3)，又∥，所以*n*－3－2(*m*－3)＝0，即2*m*－*n*＝3.

6．已知向量***a***＝(*m*,4)，***b***＝(3，－2)，且***a***∥***b***，则*m*＝\_\_\_\_\_\_.

答案　－6

解析　因为***a***∥***b***，

所以(－2)×*m*－4×3＝0，解得*m*＝－6.

7．已知＝(*k*,2)，＝(1,2*k*)，＝(1－*k*，－1)，且相异三点*A*，*B*，*C*共线，则实数*k*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－

解析　＝－＝(1－*k*,2*k*－2)，

＝－＝(1－2*k*，－3)，

由题意可知∥，

所以(－3)×(1－*k*)－(2*k*－2)(1－2*k*)＝0，

解得*k*＝－(*k*＝1不合题意，舍去)．

8．已知向量***a***＝(1，－2)，***b***＝(3,4)．若(3***a***－***b***)∥(***a***＋*k****b***)，则*k*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－

解析　3***a***－***b***＝(0，－10)，***a***＋*k****b***＝(1＋3*k*，－2＋4*k*)，

因为(3***a***－***b***)∥(***a***＋*k****b***)，所以0＋10(1＋3*k*)＝0，

解得*k*＝－.

9．已知向量***a***＝(2,3)，***b***＝(－1,2)，若*m****a***＋4***b***与***a***－2***b***共线，求*m*的值，并判断*m****a***＋4***b***与***a***－2***b***是同向还是反向？

解　*m****a***＋4***b***＝(2*m*,3*m*)＋(－4,8)＝(2*m*－4,3*m*＋8)，

***a***－2***b***＝(2,3)－(－2,4)＝(4，－1)，

因为*m****a***＋4***b***与***a***－2***b***共线，

所以4(3*m*＋8)－(－1)×(2*m*－4)＝0，解得*m*＝－2.

当*m*＝－2时，*m****a***＋4***b***＝(－8,2)，

所以 *m****a***＋4***b***＝－2(***a***－2***b***)，

所以*m****a***＋4***b***与***a***－2***b***方向相反．

10．已知两点*A*(3，－4)，*B*(－9,2)，点*P*在直线*AB*上，且||＝||，求点*P*的坐标．

解　设点*P*的坐标为(*x*，*y*)，

①若点*P*在线段*AB*上，则＝，

∴(*x*－3，*y*＋4)＝(－9－*x*,2－*y*)．

解得*x*＝－1，*y*＝－2，

∴*P*(－1，－2)．

②若点*P*在线段*BA*的延长线上，则＝－，

∴(*x*－3，*y*＋4)＝－(－9－*x*,2－*y*)．

解得*x*＝7，*y*＝－6，∴*P*(7，－6)．

综上可得，点*P*的坐标为(－1，－2)或(7，－6)．

11．向量***a***＝(2，－1)，|***b***|＝3|***a***|，***a***∥***b***，则***b***可能是(　　)

A．(6,3) B．(3,6)

C．(－6，－3) D．(－6,3)

答案　D

解析　由***a***∥***b***可排除A，B，C，故选D.

12．(多选)已知向量***a***＝(*x*,3)，***b***＝(－3，*x*)，则下列叙述中不正确的是(　　)

A．存在实数*x*，使***a***∥***b***

B．存在实数*x*，使(***a***＋***b***)∥***a***

C．存在实数*x*，*m*，使(*m****a***＋***b***)∥***a***

D．存在实数*x*，*m*，使(*m****a***＋***b***)∥***b***

答案　ABC

解析　A不正确，若***a***∥***b***，则*x*2＋9＝0，方程无实根；B不正确，若(***a***＋***b***)∥***a***，则3(*x*－3)－*x*(*x*＋3)＝0，方程无实根；C不正确，若(*m****a***＋***b***)∥***a***，则3(*mx*－3)－*x*(3*m*＋*x*)＝0，方程无实根；D正确，可令*m*＝0，则*m****a***＋***b***＝***b***，无论*x*为何值，都有***b***∥***b***.

13．已知向量＝(1，－3)，＝(2，－1)，＝(*k*＋1，*k*－2)，若*A*，*B*，*C*三点不能构成三角形，则实数*k*应满足的条件是(　　)

A．*k*＝－2 B．*k*＝

C．*k*＝1 D．*k*＝－1

答案　C

解析　因为*A*，*B*，*C*三点不能构成三角形，则*A*，*B*，*C*三点共线，则∥，又＝－＝(1,2)，＝－＝(*k*，*k*＋1)，所以2*k*－(*k*＋1)＝0，即*k*＝1.

14．设＝(－2,4)，＝(－*a*,2)，＝(*b*,0)，*a*>0，*b*>0，若*A*，*B*，*C*三点共线，则＋的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　由题意，得＝－＝(－*a*＋2，－2)，＝－＝(*b*＋2，－4)．又∥，所以－4(－*a*＋2)＝－2(*b*＋2)，整理得2*a*＋*b*＝2，所以＋＝(2*a*＋*b*)＝≥＝，当且仅当*b*＝*a*时等号成立，即＋的最小值为.

15.如图所示，在四边形*ABCD*中，已知*A*(2,6)，*B*(6,4)，*C*(5,0)，*D*(1,0)，则直线*AC*与*BD*交点*P*的坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　设*P*(*x*，*y*)，则＝(*x*－1，*y*)，＝(5,4)，＝(－3,6)，＝(4,0)．

由*B*，*P*，*D*三点共线可得＝*λ*＝(5*λ*，4*λ*)．

又因为＝－＝(5*λ*－4,4*λ*)，

由与共线得，(5*λ*－4)×6＋12*λ*＝0.

解得*λ*＝，所以＝＝，

所以点*P*的坐标为.

16．设向量***a***＝(*λ*＋2，*λ*2－cos2*α*)，***b***＝，其中*λ*，*m*，*α*为实数，若***a***＝2***b***，求的取值范围．

解　由***a***＝2***b***，知

∴

又cos2*α*＋2sin *α*＝－sin2*α*＋2sin *α*＋1＝－(sin *α*－1)2＋2，

∴－2≤cos2*α*＋2sin *α*≤2，

∴－2≤*λ*2－*m*＝(2*m*－2)2－*m*≤2，

∴≤*m*≤2，

∵＝＝2－，∴－6≤2－≤1，

∴的取值范围为[－6,1]．