无锡市 2024 年秋学期高三期终教学质量调研测试 25.01

数学

本试卷共 4 页，19 题．全卷满分 150 分．考试用时 120 分钟．

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写答题卡上，用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上，将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”．

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．

4. 考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\},A=\{1,2\},B=\{3,4\}$, 则 $\{5\}=$ （　　）

A. $A\cap(\complement_U B)$　　B. $A\cup(\complement_U B)$　　C. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$　　D. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

2. 设 i 为虚数单位，若复数 $(1+i)(2-ai)$ 是纯虚数，则实数 a 的值为 （　　）

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 2

3. “$x>y$”成立的充分不必要条件是 （　　）

A. $x^2>y^2$　　B. $\log_2 x>\log_2 y$　　C. $2^x>2^y$　　D. $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$

4. 在二项式 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数的和是 32，则展开式中 x 的系数为 （　　）

A. 40　　B. 80　　C. -40　　D. -80

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的斜率为 $\sqrt{3}$，一个焦点在抛物线 $y^2=16x$ 的准线上，则双曲线的顶点到渐近线的距离为 （　　）

A. 3　　B. 6　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，满足 $\boldsymbol{a}=(1,-\sqrt{3}),|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4$，且 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 已知 $\tan\alpha=3,\tan(\alpha-\beta)=5$，则 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=$ （　　）

A. $\frac{23}{11}$　　B. $\frac{25}{11}$　　C. $\frac{23}{5}$　　D. 5

8. 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=4$，$f(3x+1)-2$ 是奇函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$，则 $\sum_{k=1}^{21} kf\left(k-\frac{1}{2}\right)$ 的值为 （　　）

A. 42　　B. 45　　C. 420　　D. 483

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 从含有 3 道代数题和 2 道几何题的 5 道试题中随机抽取 2 道题，每次从中随机抽出 1 道题，抽出的题不再放回，则 （　　）

A.“第 1 次抽到代数题”与“第 2 次抽到代数题”相互独立

B.“第 1 次抽到代数题”与“第 1 次抽到几何题”是互斥事件

C.“第 1 次抽到代数题且第 2 次抽到几何题”的概率是 $\frac{3}{10}$

D.“在抽到有代数题的条件下，两道题都是代数题”的概率是 $\frac{1}{3}$

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 A_1D 上的动点，则 （　　）

A. BP // 平面 D_1B_1C　　B. $BP\perp AC$

C. 存在点 P，使得 $BP=\sqrt{5}$　　D. 三棱锥 B_1-PBC_1 的体积为定值 $\frac{8}{3}$

11. 函数 $f(x)=a\cos x+x\sin x$．下列说法中正确的有 （　　）

A. 函数 $f(x)$ 是偶函数

B. $\exists a\in\mathbb{R}$，使 $f(x)$ 为周期函数

C. 当 $a=1, x\in(-\pi,\pi)$ 时，$f(x)$ 的极小值为 1

D. 当 $a=1, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$e^x+e^{-x}\geqslant 2f(x)$ 恒成立

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(4,\sigma^2)$，且 $P(\xi<6)=4P(\xi<2)$，则 $P(2<\xi<6)=$ ________．

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)\cos A+\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\sin A=0$，$b=2\sqrt{2}, B=\frac{\pi}{4}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ________．

14. 数学史上著名的“康托三分集”，其操作过程如下：将闭区间 $[0,1]$ 均分为三段，去掉中间的区间段 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，记为第 1 次操作；再将剩下的两个区间，分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，记为第 2 次操作…；每次操作都在上一次操作的基础上，将剩下的各个区间分别均分为三段，同样各自去掉中间的区间段，操作过程不断地进行下去．若使前 n 次操作后所有区间长度之和不超过 $\frac{1}{50}$，则需要操作的次数 n 的最小值为 ________，该次操作完成后依次从左到右第四个区间为 ________.$(\lg 2=0.3010, \lg 3=0.4771)$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）某学校对男女学生是否经常锻炼进行了抽样调查，统计得到以下 2×2 列联表：

	男生	女生	合计
经常锻炼	120		
不经常锻炼		100	180
合计		200	

(1) 讲究完成表格，并判断有多大的把握认为该学校学生是否经常锻炼与性别有关？

(2) (i)为了鼓励学生经常参加体育锻炼，采用分层抽样的方法从调查的不经常锻炼的学生中随机抽取 9 人，再从这 9 人中抽取 4 人参加座谈会，求“男女生都有人参加”的概率．

(ii)用频率估计概率，用样本估计总体，从该校全体学生中随机抽取 10 人，记其中经常锻炼的人数为 X，求 X 的数学期望．

附表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

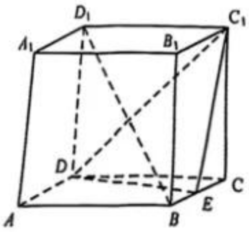
公式：

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

16．（15 分）如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 $ADD_1A_1\perp$ 底面 $ABCD$, $AA_1=\sqrt{2},\angle A_1AD=\frac{\pi}{4}$, E 是线段 BC 的中点．

（1） 求证：D_1B // 平面 C_1DE；

（2） 求二面角 $E-DC_1-C$ 的余弦值．



（第16题图）

17．（15 分）已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$．

（1） 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处有极小值，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2） 若函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=-x+c$ 相切，求实数 c 的值．

18.（17 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，且过点 $A\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点.

（1） 求椭圆 C 的方程；

（2） 若四边形 $APFQ$ 是平行四边形，求直线 l 的方程；

（3） 若 $\triangle PQF$ 的内心在直线 AF 上，求证：直线 l 过定点.

19.（17 分）从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 k 项、第 $k+1$ 项、... 第 $k+m-1$ 项 $(k\geqslant 1,m\geqslant 2)$，并按原顺序构成的新数列称为数列 $\{a_n\}$ 的“(k,m) 连续子列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0,a_2=1$，对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$，数列 $\{a_n\}$ 的“$(2k,3)$ 连续子列”是公比为 $\dfrac{k+1}{k}$ 的等比数列.

（1） 求 a_4 的值，并判断数列 $\{a_n\}$ 的“(2,4) 连续子列”是否是等比数列；

（2） 证明：$a_{2n}=n^2$；

（3） 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\tan b_n=\dfrac{1}{a_{2n}+n+1}$，且 $b_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，数列 $\{b_n\}$ 的“(k,m) 连续子列”所有项的和记为 $T(k,m)$，求 $\tan T(k,m)$，并求出满足 $\tan T(k,m)=\dfrac{1}{5}$ 的所有 k 和 m 的值.