

2024~2025 学年度第一学期期末重点校联考
高三数学

出题学校：宝坻一中 蓟州一中

第 I 卷（共 45 分）

一、选择题（本题共 9 小题，每题 5 分，共 45 分）

1. 已知集合 $U = \{x \in \mathbf{N} | -1 \leq x \leq 5\}$, $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $C_U(A \cup B) =$
- A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{0, -1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $\frac{a}{b} > 1$ ” 是 “ $a > b$ ” 的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知具有线性相关关系的变量 x, y , 设其样本点为 $A_i(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, 8)$, 经验回归方程为 $\hat{y} = -2x + \hat{a}$, 若 $\sum_{i=1}^8 x_i = 40$, $\sum_{i=1}^8 y_i = -64$, 则 $\hat{a} =$
- A. -2 B. 2 C. -4 D. 4
4. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是
- A. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ B. $f(x) = \lg(x-1)^2$
C. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ D. $f(x) = \frac{\cos x + x^2}{e^{|x|}}$
5. 已知 $a = 0.4^{0.5}$, $b = \log_{0.5} 0.4$, $c = 0.5^{0.4}$, 则 a, b, c 三者的大小关系是
- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
6. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{n+1} + a_n = 5 \cdot 2^n$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为
- A. 310 B. 682 C. 3410 D. 10230

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2\omega x + \cos 2\omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π ，则下列说法正确的是

A. $\omega = 2$

B. $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

C. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到的函数图象恰好关于 y 轴对称

D. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, A 为 C 的左顶点，抛物线 $y^2 = 16ax$ 的准线与 x 轴交于 B . 若在 C 的渐近线上存在点 P ，使得 $\angle APB = 90^\circ$ ，则 C 的离心率的取值范围为

A. $(1, \frac{\sqrt{5}}{2})$

B. $[1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

C. $(1, \frac{5}{4})$

D. $[1, \frac{5}{4}]$

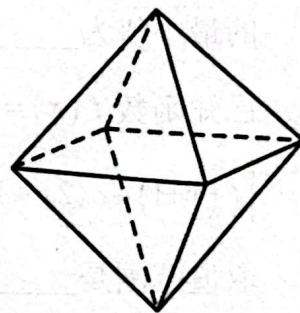
9. 六氟化硫，化学式为 SF_6 ，在常压下是一种无色、无味、无毒、不燃的稳定气体，有良好的绝缘性，在电器工业方面具有广泛用途。六氟化硫分子结构为正八面体结构（正八面体是每个面都是正三角形的八面体），如图所示。若此正八面体的棱长为 2，则下列说法正确的是

A. 正八面体的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B. 正八面体的表面积为 $8\sqrt{3} + 4$

C. 正八面体的外接球体积为 $\frac{64\pi}{3}$

D. 正八面体的内切球表面积为 $\frac{8\pi}{3}$



第 II 卷 (共 105 分)

二、填空题 (本题共 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分)

10. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i} - 2i$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 的虚部为_____.

11. $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, x^{-2} 的系数为_____.

12. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 直线 $l: (a+1)x + 2y - 2a = 0$ 恒过定点 P , 圆 C 的圆心与点 P 关于直线 $y = x$ 对称, 直线 $l': 2x + y - 5 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$, 则圆 C 的半径为_____.

13. 中国是瓷器的故乡, 瓷器的发明是中华民族对世界文明的伟大贡献, 瓷器传承着中国文化, 有很高的欣赏和收藏价值. 现有一批同规格的瓷器, 由甲、乙、丙三家瓷器厂生产, 其中甲、乙、丙瓷器厂分别生产 400 件、400 件、200 件, 而且甲、乙、丙瓷器厂的次品率依次为 5%、4%、4%. 现从这批瓷器中任取一件, 取到次品的概率是_____, 若取到的是次品, 则其来自甲厂的概率为_____.

14. 已知平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, E 为线段 BC 的中点. 若

F 为线段 DE 上的一点, 且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda =$ _____, $|\overrightarrow{AF}|$ 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 8x + 1 (a \in \mathbf{R})$, 若关于 x 的方程

$|f(x+1) - a(2x+1) - 11| - |ax+4| = 0$ 恰有 4 个不相等的实数根, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题（本题共 5 小题，共 75 分）

16.（本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $b > c$ ，
 $2a\cos A = b\cos C + c\cos B$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $12\sqrt{3}$ ， $a = 2\sqrt{13}$ 。

(I) 求 A 的值；

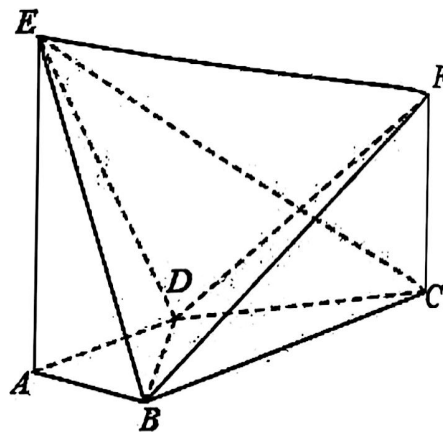
(II) 求 b 的值；

(III) 求 $\cos(2B + A)$ 的值。

17. (本小题满分 15 分)

如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = AD = 2$,
 $AE = BC = 2CF = 4$.

- (I) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;
(II) 求平面 ADE 与平面 BDF 夹角的余弦值;
(III) 求四面体 $B-DEF$ 的体积.



18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F_1 , 右焦点为 F_2 , 离心率

$e = \frac{1}{2}$. 过 F_2 且斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线交椭圆 E 于 A 、 B 两点, $\triangle ABF_1$ 的周长为 8.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 F_2 且垂直于 x 的直线与椭圆 E 的一个交点为 P (P 在 x 轴上方), 过点 P 且平行于 AB 的直线 l 与椭圆 E 交于另一点 Q , 问: 是否存在直线 l , 使得四边形 $PABQ$ 为平行四边形? 若存在, 求出此时四边形 $PABQ$ 的面积; 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 15 分)

已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $S_n = \frac{a_n a_{n+1}}{2(a_{n+1} - a_n)}$, 其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = a_1 C_n^1 + a_2 C_n^2 + a_3 C_n^3 + \cdots + a_n C_n^n$.

(i) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 T_n ;

(ii) 若 $c_n = \frac{2b_n}{a_n}$ 且 $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^{c_n-1} \frac{1}{a_i}$, 证明: $d_n \leq 1$.

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = e^x + mx - 1$ ($m \in \mathbb{R}$), $g(x) = \ln(x+1)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若 $f(x) + g(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(III) 求证: $x > 0$ 时, $g(x) > \frac{x^2}{e^x - 1}$.