炎德·英才大联考长郡中学2025届高三月考试卷(五)

数 学

学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线 内 不 要 答 题

得分________

本试卷共8页.时量120分钟.满分150分.

一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1.命题 p:$\forall x\in \mathbf{R}$,$ax^2+2x+5>0$ 为真的一个充分不必要条件是

A.$a<\frac{1}{5}$　　B.$a>1$　　C.$a\leqslant\frac{1}{5}$　　D.$a>\frac{1}{5}$

2.已知复数 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}-\frac{1}{2-\mathrm{i}}$,i为虚数单位,则复数 z 在复平面内所对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

3.在矩形 $ABCD$ 中,$AB=6$,$AD=4$,E 为 BC 的中点,则向量 $\overrightarrow{AE}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量是

A.$\frac{11}{13}\overrightarrow{AC}$　　B.$\frac{12}{13}\overrightarrow{AC}$　　C.$\frac{9}{13}\overrightarrow{AC}$　　D.$\frac{10}{13}\overrightarrow{AC}$

4.已知圆 M:$x^2+y^2=16$ 与圆 N:$x^2+y^2-4x-my+n=0$ 的公共弦与直线 $x-2y=0$ 垂直,且垂足为$(2,1)$,则圆 N 的半径为

A.$\sqrt{5}$　　B.$\sqrt{11}$

C.2　　D.$2\sqrt{3}$

5.2020年3月14日是全球首个国际圆周率日(π Day).历史上,求圆周率π的方法有多种,与中国传统数学中的“割圆术”相似,数学家阿尔·卡西的方法是:当正整数 n 充分大时,计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形(各边均与圆相切的正 $6n$ 边形)的周长,将它们的算术

平均数作为 2π 的近似值. 按照阿尔·卡西的方法，π 的近似值的表达方式是

A. $3n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$　　B. $6n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$

C. $3n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$　　D. $6n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$

6. 近年来，国内中、短途旅游人数增长显著，2024 年上半年旅游人数更创新高，充分展示了国内文旅消费潜力. 甲、乙、丙、丁四位同学打算去北京、成都、贵阳三个地方旅游，每位同学只去一个地方，每个地方至少去 1 人，则甲、乙都去北京的概率为

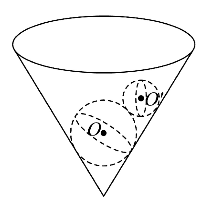
A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{18}$　　C. $\dfrac{1}{36}$　　D. $\dfrac{1}{72}$

7. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$满足 $f(-x)=f(x)+2x$，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)>2x-1$，则不等式 $f(2x-1)-f(x)<3x^2-5x+2$ 的解集为

A. $(-\infty,1)$　　B. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

8. 如图，在一个有盖的圆锥容器内放入两个球体，已知该圆锥容器的底面圆直径和母线长都是$\sqrt{3}$，则



A. 这两个球体的半径之和的最大值为$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

B. 这两个球体的半径之和的最大值为$\dfrac{4}{3}$

C. 这两个球体的表面积之和的最大值为$(6+3\sqrt{3})\pi$

D. 这两个球体的表面积之和的最大值为$\dfrac{10\pi}{9}$

二、选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.）

9. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $S_n=2a_n-1$，则下列结论正确的是

A. $S_2=2$

B. 数列$\{a_n\}$为等比数列

C. $a_n=2^n$

D. 若 $b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_{n+1}\log_2 a_{n+2}}$，则数列$\{b_n\}$的前 10 项和为$\dfrac{10}{11}$

10. 数学美的表现形式不同于自然美或艺术美那样直观，它蕴藏于特有的抽象概念、公式符号、推理论证、思维方法等之中，揭示了规律性，是一种科学的真实美. 在平面直角坐标系中，曲线 C：$x^2+y^2=2|x|+2|y|$ 就是一条形状优美的曲线，对于此曲线，下列说法正确的有

A. 曲线 C 围成的图形有 4 条对称轴

B. 曲线 C 围成的图形的周长是 $4\sqrt{2}\pi$

C. 曲线 C 上的任意两点间的距离不超过 5

D. 若 $T(a,b)$ 是曲线 C 上任意一点，$|4a+3b-18|$ 的最小值是 $11-5\sqrt{2}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足①$f(x+1)-f(x)=2x+2$，$x\in\mathbf{R}$；②当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，则

A. $f(0)=-1$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $f(n)>2024n$

D. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|<x^2+|x|+3$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	得分
答案												

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 作一条渐近线的垂线，垂足为 Q，延长 F_1Q 与双曲线的右支相交于点 P，若 $\overrightarrow{F_1P}=3\overrightarrow{F_1Q}$，则双曲线 C 的离心率为________.

13. 一条直线与函数 $y=\ln x$ 和 $y=e^x$ 的图象分别相切于点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$，则 $(x_1-1)(x_2+1)$ 的值为________.

14. 质点每次都在四边形 $ABCD$ 的顶点间移动，每次到达对角顶点的概率是它到达每个相邻顶点概率的两倍，若质点的初始位置在 A 点，经过 n 次移动到达 C 点的概率为________.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15.（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\tan A+\tan C=\dfrac{2\sqrt{3}b^2}{a^2-b^2-c^2}$.

(1)求 C；

(2)若 $c=3$，D 为边 AB 的中点，$CD=1$，求$|a-b|$.

16.（本小题满分 15 分）

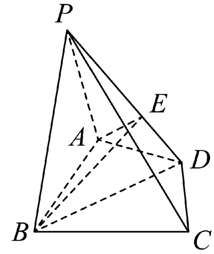
设 $f(x)=(x^2+ax)\ln x+\frac{1}{2}x^2$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=0$，求 $f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程；

(2)若 $a\in\mathbf{R}$，试讨论 $f(x)$的单调性.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，BD 平分$\angle ABC$，$\angle ADC=120°$，$AD\perp AB$，$CD\perp BC$，$\triangle PAB$ 为正三角形，$PD=BD$.



(1)求证：平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)设 E 为 PD 上一点，$AB=2$，四棱锥 $E-ABCD$ 的体积为 $\frac{4}{9}$，求平面 ABE 与平面 PAD 夹角的余弦值.

18.(本小题满分 17 分)

已知椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 $P(x_0,y_0)$为椭圆 C 上异于顶点的一动点,$\angle F_1PF_2$ 的角平分线分别交 x 轴、y 轴于点 M,N.

(1)若 $x_0=\frac{1}{2}$,求$|PF_1|$;

(2)求证:$\frac{|PM|}{|PN|}$为定值;

(3)当$\triangle F_1PN$ 的面积取到最大值时,求点 P 的横坐标 x_0.

19.（本小题满分 17 分）

给定整数 $n\geqslant 3$，由 n 元实数集合 S 定义其相伴数集 $T=\{|a-b| \mid a、b\in S, a\neq b\}$，如果 $\min(T)=1$，则称集合 S 为一个 n 元规范数集，并定义 S 的范数 f 为其中所有元素绝对值之和.

(1)判断 $A=\{-0.1,-1.1,2,2.5\}$、$B=\{-1.5,-0.5,0.5,1.5\}$哪个是规范数集，并说明理由；

(2)任取一个 n 元规范数集 S，求证：$|\min(S)|+|\max(S)|\geqslant n-1$；

(3)当 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2023}\}$遍历所有 2023 元规范数集时，求 S 的范数 f 的最小值.

注：$\min(X)$、$\max(X)$分别表示数集 X 中的最小数与最大数.