

数 学

时量:120 分钟 满分:150 分

得分 _____

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知在复平面内,向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $-1+3i$,向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $-2+i$,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数为

- A. $1+2i$ B. $-1-2i$
C. $-3-4i$ D. $-3+4i$

2. “ $\log_{\frac{1}{3}}x^2 > \log_{\frac{1}{3}}x$ ”是“ $0 < x < 1$ ”的

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

3. 在平面直角坐标系内,原点到直线 l 的距离为 1,点 $A(5,0)$ 到直线 l 的距离为 2,则满足条件的直线 l 共有

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

4. 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,所得图象关于直线 $x = \pi$ 对称,则 ω 的最小值是

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

5. 已知球 O 的表面积为 4π ,若球 O 与正四面体 $S-ABC$ 的六条棱均相切,则此四面体的体积为

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{8}{3}$
C. $2\sqrt{2}$ D. 8

6. 已知 $x > 0, y > 0, x + 2y = 3$, 则 $\frac{x^2 + 3y}{xy}$ 的最小值为

A. $3 - 2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2} + 1$

C. $\sqrt{2} - 1$

D. $\sqrt{2} + 1$

7. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 若集合 A, B 满足: $A \subseteq B \subseteq U$, 则集合对 (A, B) 共有

A. 36 个

B. 48 个

C. 64 个

D. 81 个

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$. 若过点 $P(-1, m)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则实数 m 的取值范围是

A. $\left(-\frac{14}{e}, \frac{4}{e}\right)$

B. $\left(0, \frac{8}{e}\right)$

C. $\left(0, \frac{4}{e}\right)$

D. $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e}\right)$

二、选择题(本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 至少有两项符合题目要求, 若全部选对得 6 分, 部分选对得部分分, 选错或不选得 0 分)

9. 已知 α, β 均为锐角, $2\cos \alpha = \sin(\alpha + \beta)$, 则下列说法正确的是

A. 若 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{3}$

B. 若 $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin \beta = \frac{1}{2}$

C. 若 $\beta > \frac{\pi}{6}$, 则 $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

D. α 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

10. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 坐标原点为 O . 若椭圆

圆 C 上的点 P 满足 $|OP| = \sqrt{7}$, 则下列说法正确的有

A. $\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{5}$

B. $\triangle F_1 P F_2$ 的面积为 2

C. $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 5$

D. $\triangle F_1 P F_2$ 的内切圆半径为 $\sqrt{2} - 1$

11. 已知数列 $\{u_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 若存在常数 $M > 0$, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 恒有 $|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_2 - u_1| \leq M$, 则称 $\{u_n\}$ 为 B -数列. 则下列说法正确的是

A. 若 $\{u_n\}$ 是以 1 为首项, $q (|q| < 1)$ 为公比的等比数列, 则 $\{u_n\}$ 为 B -数列

B. 若 $\{u_n\}$ 为 B -数列, 则 $\{S_n\}$ 也为 B -数列

C. 若 $\{S_n\}$ 为 B -数列, 则 $\{u_n\}$ 也为 B -数列

D. 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为 B -数列, 则 $\{a_n \cdot b_n\}$ 也为 B -数列

三、填空题(本大题共 3 个小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知单位向量 a, b 满足 $|a + 2b| = \sqrt{3}$, 则 a 与 b 的夹角为_____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x + 2x, & x > 0, \\ \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ 有 4 个零点, 则正数 ω 的取值范围是_____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 若双曲线不存在以点 $(2a, a)$ 为中点的弦, 则双曲线离心率 e 的取值范围是_____.

四、解答题(本大题共 5 个小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

15. (本小题满分 13 分)

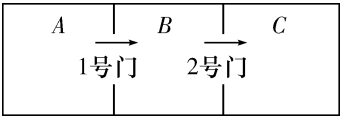
记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $b+c=2a\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)求 A ;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $\sin B\sin C=\frac{9}{64}$,求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. (本小题满分 15 分)

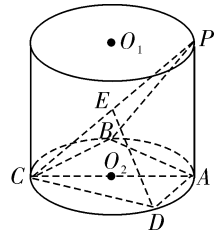
如图所示,在研究某种粒子的实验装置中,有 A, B, C 三个腔室,粒子只能从 A 室出发经 B 室到达 C 室. 粒子在 A 室不旋转,在 B 室、 C 室都旋转,且只有上旋和下旋两种状态,粒子间的旋转状态相互独立. 粒子从 A 室经过 1 号门进入 B 室后,等可能的变为上旋或下旋状态,粒子从 B 室经过 2 号门进入 C 室后,粒子的旋转状态发生改变的概率为 p ($0 < p < 1$). 现有两个粒子从 A 室出发,先后经过 1 号门、2 号门进入 C 室,记 C 室两个粒子中,上旋状态粒子的个数为 X .



- (1)求 X 的分布列和数学期望;
- (2)设 $p=\frac{1}{3}$,若两个粒子经过 2 号门后都为上旋状态,求这两个粒子通过 1 号门后都为上旋状态的概率.

17. (本小题满分 15 分)

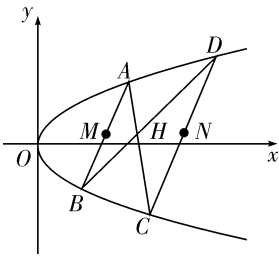
如图,在圆柱 O_1O_2 中,点 A,B,C,D 为底面圆周上四点, AP 为圆柱的一条母线, E 为 PC 的中点, $AD=1$.



- (1)若 $AD \parallel BC, BC=2$,证明: $ED \parallel$ 平面 ABP ;
- (2)若 $AD \perp DC, BA=BC=\sqrt{2}$,且二面角 $A-CP-B$ 的余弦值为 $\frac{1}{2}$,求 AP .

18. (本小题满分 17 分)

如图,已知抛物线 $\Gamma: y^2 = x$, 点 A, B, C, D 是抛物线上的四个点, 其中 A, D 在第一象限, B, C 在第四象限, 满足 $AB \parallel CD$, 线段 AC 与 BD 交于点 H . 记线段 AB 与 CD 的中点分别为 M, N .



- (1)求抛物线 Γ 的焦点坐标;
- (2)求证:点 M, H, N 三点共线;
- (3)若 $2|HM| = |HN| = 2$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

19. (本小题满分 17 分)

已知 $f(x) = \tan x - ax$.

(1) 若 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 恒有 $f(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a=1$ 时, 将 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的零点从小到大依次排列,
设第 n 个零点为 r_n .

证明: (i) $r_1 + r_3 < 2r_2$;

$$(ii) r_n + \frac{1}{r_n} < \left(n + \frac{7}{12}\right)\pi.$$