

高中数学教材中的问题及问题提出任务的历史比较

江苏省苏州市吴江平望中学 倪高见 (邮编:215221)

摘要 从历史比较的角度研究了三套人教版高中数学教材中问题的数量、位置和类型分布,以及问题提出任务的类型和在不同知识领域的分布.研究发现,问题导向学习已成为教材的新特点,问题提出任务的数量虽然有所增加,其占比仍然较小且在不同知识领域的分布不均衡.教材中的问题数量的增加为学生提供了丰富的数学学习机会,包括获取知识和经历思维过程,然而同时也存在不同类型问题在知识领域的分布不均衡的情况.

关键词 教材;高中数学;问题;问题提出

1 研究背景

陶行知曾说:“发明千千万,起点是一问.”问题提出教学作为提升学生数学能力的有效手段之一,如何有效提出问题以促进学生学习一直是数学教育研究的重点^[1].1954年颁布的《中学数学教学大纲(修订草案)》就已强调数学概念与技能(如熟练计算与作图、公式操作、使用数学表)对于数学学习的重要性^[2].然而直到1996问题

提出才在《全日制普通高级中学数学教学大纲(供试用)》中首次出现,并明确指出解决实际问题的能力包括能够提出、分析和解决具有实际意义或与相关学科、生产和日常生活相关的数学问题^[3].2003年颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》进一步将问题提出正式纳入课程目标,并强调增强从数学角度发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力^[4].《普通高中数学课

会有较好的效果.”^[3]学生进入初中之后的代数起始教学阶段,教师要十分重视“指示正规”.具体到上文课例来说,学生首次遇到求代数式的值时,解题思路是容易的,教师要把教学用力点放在重视解题过程、解题步骤的书写上.教学经验表明,不少学生受到小学阶段算术、算式为主的解题惯性影响,对初中阶段代数解题过程往往是轻视的,只满足于求出结果,不太重视过程表达.所以,在上文课例中,对于例1的教学,教师要完整示范解题步骤,然后在跟进的“练习1”讲评时,要慢下来,让学生完整、规范表达,教师要到各个小组巡视,如发现典型错漏解法,可投影“示错”“纠错”与“究错”,在学生大面积过关后才能推进后续学程.

3.3 基于学情要相机出示“挑战问题”

如上所述,本文课例“代数式的值”在“新教材”中的引例、例题、习题等,对于笔者所在地区的多数学校、班级的学生来说,学习内容都不是难点.全国著名特级教师李庾南老师在文^[4]中

曾指出:在课堂教学中要基于学情相机提出一些“有挑战的问题”,把学生的思维卷入新的问题中,激发学生探索新知的兴趣.可见,为了满足优秀学生的探索兴趣,避免整节课都在“空转”,上文课例的“教学环节(三)”属于“新教材”中没有出现的新增内容.这是基于学情的考虑,相机出示“有挑战的问题”,可以激发学生学习兴趣,同时也为学生在八年级乘法公式、探究勾股定理等内容学习提供一些必要的铺垫.

参考文献

- [1] 人民教育出版社,课程教材研究所.义务教育教科书 数学 七年级 上册[M].北京:人民教育出版社,2024.
- [2] 李善良.高中数学课程改革:探索与实践[M].南京:江苏教育出版社,2012.
- [3] 傅种孙.平面几何教本[M].北京:北京师范大学出版社,1982.6.
- [4] 李庾南,刘东升.相机选用“有挑战的问题”驱动新知探究[J].江苏教育.2022(3):30-32.

(收稿日期:2024-09-27)

程标准(2017年版)》更是明确提出“教师应结合相应的教学内容,落实‘四基’,培养‘四能’,促进学生数学核心素养的形成与发展”,其中的“四能”即指从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力^[5].然而教材作为课程理念的重要载体和教学活动的基础,问题及问题提出任务是如何呈现的?课程标准中对问题提出的强调是如何影响高中数学教材的?当前高中数学教材中的问题提出任务是否足够丰富,以达成课程标准设定的目标?鉴于学生参与问题提出的方式多种多样,教材又是如何具体融入这一要素的?本研究旨在通过分析高中数学教材中问题与问题提出任务的数据深入探究这些问题.

2 研究设计

2.1 研究对象

鉴于问题提出在1996年的课程大纲中首次明确提出,本研究选择了人民教育出版社在1996年后编制三套高中数学教材(1997年版,2004年版,2019年版),对其中的问题与问题提出任务进行比较与分析.

2.2 研究思路与过程

首先审视三套教材,辨识出那些确切属于问题提出任务的例子.甄别标准如下:(1)操作定义:问题指的是需要学生采取一定手段来完成的任务;而问题提出则特指那些基于给定的情境、数学表达式或图表,要求学生自主生成新问题的任务;(2)研究范围:三套教材的必修部分;(3)计

数规则:按照一道例题或习题计为一个问题的方式进行统计,与例题配套的附加问题将计入该例题而不单独计数,“思考”“观察”“探索”和“归纳”等栏目中的每道问题将按栏目分别计为一个问题.

研究过程分为两个阶段.第一阶段参照已有研究对教材问题提出任务进行比较,对比不同类型问题提出任务的比例,以及这些任务在不同教学内容领域的分布情况.第二阶段根据问题在教材中的位置,将教材划分为正文内容、例题与习题三个部分,并统计了各部分包含的问题数量,进一步分析新教材中正文内容部分问题的具体表现形式与关键特征.

借鉴斯坦因(Stein)对数学任务分类的研究分五种问题类型:知识性(k)、理解性(u)、抽象与概括性(a)、探索与发现性(e)、反思与总结性(r)^[6].在问题的类型分析上,依据问题的具体表现(即它能为学生提供何种学习机会)及其关键特征(解答问题所需的知识类型)进行分类.在分析每个问题时,特别关注其是否能帮助学生掌握某个知识点或体验某种思维过程.若问题侧重于知识掌握,根据认知层次将其分为知识性和理解性两类;若问题侧重于思维过程,则依据思维方式将其分为抽象与概括性、探索与发现性、反思与总结性三类.表1详细列出了这五种问题类型的特定表现形式以及关键特征.

表1 五种问题类型的具体表现和关键特征

问题类型	具体表现	关键特征
k	记忆(概念、公式、定理、方法等);模仿(算法、推理等);直接或直观判断(一个概念、公式、定理等);分析细节并补充关键元素、特殊情况等	单一孤立
u	通过实例来说明(概念、原理、代数表达式等);多种表征(意义)(文字、符号、图象、表格);代数与几何之间的转换与解读;建立不同知识间的形式与结构联系;综合运用知识解决实际问题(运用多种知识,涉及多种情境及方法迁移,要求多步骤逻辑推理等)	关联整合
a	通过分析(或验证)多个实例来提炼本质特征,并概括出一般的数学概念(或数学事实、原理);通过与类似数学对象类比,提炼本质特征,并概括出一般的数学概念(或数学事实、原理);从具体到一般地抽象和概括数学结构(图形结构、推理结构等)	通用结构化
e	在给定情境下寻求或创造一个想法或方法(包括算法、推理方法、统计方法);构建策略或解决方案以解决给定情境下的问题并执行;通过归纳(或观察、操作、类比、比较等)或演绎(如特化、泛化等)来发现(或猜测)关系、规律或属性	未知拓展
r	为了通过回顾、比较和总结它们的特性和功能来增进对知识和方法的理解;通过比较在不同阶段所学的数学对象(如定义、公式等)实现知识体系化;总结学习某种知识的经验并反思自己的思维过程(例如,如何研究数学对象,如何发现数学性质等)	系统化元认知

五种类型是基于对教材文本部分问题的深入分析得出的划分,但并非涵盖所有问题类型.它们之间并非孤立存在,而是可能存在一定的交集.尽管存在重叠,每个类别都有其独特的侧重点,从而与其他类别相区分.如当问题要求学生探索并发现新知识或方法时,虽然涉及“抽象与概括”,但还是归类于强调通过自主选择和观察得出具体结论的“探索与发现”.如问题“取底数 a 的多个不同值($a>0$ 且 $a\neq 1$),在同一平面直角坐标系中画出相应指数函数 $y=a^x$ 的图象,观察这些图象,它们有哪些共同之处?你能从中概括出指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)的定义域、值域和单调性吗?”虽然涉及对共同特性的抽象概括,但核心在于鼓励学生通过实际操作和观察来得出具体结论,因此该任务被归类为“探索与发现”类型.

3 研究结果与分析

3.1 问题与问题提出任务的历史比较

表2呈现了高中教材中问题与问题提出任务的数量.观察发现,问题提出任务在教材中的数量相对较少.为了更深入地分析这一现象,进一步研究了不同内容领域中问题提出任务的分布情况,以及各类问题提出任务在总数中所占的比例.从整体上看,问题提出任务比例极低,即使最新的2019版教材中这一比例也仅为0.4%.值得注意的是,在函数、代数、几何、概率与统计这四个内容领域中,问题提出任务的分布存在显著的不均衡现象.

表2 教材中问题和提出任务的数量

版本	问题数量	问题提出任务数量
1997版	2151	0
2004版	2496	2
2019版	2629	11

为了深入分析教材中问题提出任务的数量普遍偏少的现象,将三个不同教材系列中的问题提出任务按照其所属的知识领域(函数、代数、几何和概率与统计)进行分类,并将问题提出任务划分为以下四种类型:

类型一:基于给定的关系表达式(如方程或函数解析式)或图象来创设问题;

类型二:基于具有相似数学关系或结构的问

题来创设变式问题;

类型三:基于给定的信息和示例问题来创设额外的问题;

类型四:完全基于给定信息来创设问题.

表3展示了2019版教材中11个问题提出任务的分布情况.统计发现,函数部分的问题提出任务占比最高,达到了64%,并且涵盖了类型一、二、三.概率与统计部分的问题提出任务位居第二,涉及类型一、四.几何部分的问题提出任务则仅涉及类型三,而代数部分并未包含问题提出任务.

尽管问题提出任务在教材中的比例较小,且在不同内容领域的分布不均,但四种类型的问题提出均有所体现.在函数部分,问题提出任务占比最大,如“构建其他可用解析式 $y=x(10-x)$ 描述其中变量关系的问题情境”.教材在这一问题的解答中不仅展示了如何构造问题情境的过程,还在练习部分设置了类似题目,鼓励学生自行构造问题情境.

表3 2019版教材中11个问题提出任务的分布

	函数	代数	几何	概率与统计	总数
类型1	4	0	0	1	5/46%
类型2	1	0	0	0	1/9%
类型3	2	0	1	0	3/27%
类型4	0	0	0	2	2/18%
总数	7/64%	0	1/9%	3/27%	11/100%

3.2 问题的分布

(1)教材不同部分问题的分布情况

表4显示了三套高中教材中问题数量呈上升趋势.相较于1997版教材,2019版教材中问题数量增加了22%.为进一步观察这些问题在教材中的位置分布,根据教材中问题的位置将教材分为三部分(正文、例题与习题),分别统计了各部分的问题数量(表4).

表4 教材不同部分问题的分布情况

版本	正文	例题	习题
1997版	39/2%	379/18%	1733/81%
2004版	527/21%	360/14%	1609/64%
2019版	523/20%	372/14%	1734/66%

从数量上看,三版教材中的习题和例题数量

变化不大,而 2004 版和 2019 版相较于 1997 版教材正文部分的问题数量增加了近 500 道.那么这些新增的问题是什么呢?考虑到 2019 版教材与 2004 版教材编写观念的一致性(2019 版教材是 2014 版教材的修订版),下面对 2019 版教材正文部分的每个问题进行分析,并根据表 1 所示的具体表现和关键特征分为五类,分别统计了这

五类问题在不同年级和内容领域的数量.

(2)不同年级问题类型的分布情况

表 5 显示了高中各年级正文内容部分不同类型问题的数量和百分比.研究发现教材中“探索与发现”型问题所占比例几乎与“理解”型问题相同,两者合计占比为 70%.值得注意的是“反思与总结”型问题所占比例非常低.

表 5 2019 版教材不同年级问题类型分布情况

	k	u	a	e	r
高一(302/58%)	69/13%	79/15%	15/3%	122/23%	17/3%
高二(221/42%)	42/8%	98/19%	6/1%	61/12%	14/3%
总计	111/21%	177/34%	21/4%	183/35%	31/6%

结合课时安排发现,每个年级的正文部分平均每课时包含约 2 个问题.问题类型的差异主要体现“理解”型和“探索与发现”型问题上.高二年级在“理解”型问题上数量明显多于高一年级,而高一年级在“探索与发现”型问题上则显著多于高二年级.

总体来看,高中数学教材每个年级正文部分的问题数量相当均衡,这体现了教材在知识传授与数学思维引导两方面的并重.在知识传授方面,教材则更倾向于强调对“理解”型知识的掌握;在数学思维引导方面,高度重视“探索与发现”型问题的重要性.此外根据斯坦因的认知要求分类标准^[6],正文内容部分大约 80%的问题都属于高认知水平,且超过 50%的问题都是让学生“做数学”.

(3)不同知识领域问题类型的分布情况

表 6 详细列出了不同知识领域正文部分问题的具体数量与百分比.结合各知识领域的课时数,观察到四个知识领域的问题数量分布相当均匀.不同类型问题在各个知识领域的分布也呈现出各自的特点.其中,“知道”类型问题在四个知识领域的分布相对均衡,代数部分略多;“理解”类型问题在概率统计部分最为集中,函数部分相对较少;“抽象与概括”类型问题在函数和几何部分较为突出;“探索与发现”类型问题在四个知识领域的分布较为平均,但几何部分稍少一些;“反思与归纳”类型问题在几何和函数部分相对较多.总体而言,代数部分的问题更倾向于让学生获取知识,而函数部分的问题则同时注重知识的获取和思维过程的体验.

表 6 2019 版教材不同内容领域的五种类型的问题的百分比

知识领域	k	u	a	e	r	总计
函数(81)	32/6%	47/9%	10/2%	63/12%	12/2%	164/31%
代数(59)	34/7%	47/9%	0/0%	49/9%	4/0.7%	135/26%
几何(47)	23/4%	35/7%	8/2%	30/6%	11/2%	107/20%
概率与统计(52)	20/4%	48/9%	3/0.5%	41/8%	4/0.7%	117/22%

4 结论与建议

4.1 结论

自 2004 版起教材中的问题数量与布局发生了显著变化.过去教材中的问题主要作为习题出现,占比高达 81%,供学生练习使用.然而 2004 版教材正文内容部分新增了数百个问题,其位置和功能也随之变化.

新增的问题旨在引导学生学习数学,不仅通过“知道”和“理解”型问题传授知识,还通过“抽象与概括”“探索与发现”和“反思与归纳”型问题,让学生深入体验数学思维的过程.随着年级的升高,“知道”型问题比例略有减少,“理解”型问题有所增加,“抽象与概括”型问题有所减少,而“探索与发现”型问题保持稳定,“反思与归纳”

型问题则略有上升. 这些新增问题大多属于高认知水平, 超过“理解”水平的高认知问题比例高达80%. 尤其是“探索与发现”型问题在各个知识领域都有涉及, 体现了教材对“做数学”的重视. 因此“问题导向学习”已成为新教材的一大特色.

关于问题提出任务, 虽然“探索与发现”类型问题在教材中占据显著地位, 通过引导学生探究来展示如何发现并提出数学问题, 但实际上学生自行发现问题并提出问题的机会仍然稀缺. 即使在最新的2019版教材中, 问题提出任务的比例也仅为0.4%. 这一现象背后存在两种可能的解释: 一是与长期以来数学课程对问题解决能力的重视相比, 问题提出作为一个独立的教学环节在课程标准中出现仅有二十多年, 时间相对较短; 二是从教材编写者的角度出发, 尽管正文部分新增的问题旨在引导学生学习, 并展示了“如何发现和提出问题”的方法, 但可能更多的是侧重于展示过程, 而非鼓励学生自主提出问题.

4.2 建议

基于以上分析提出建议:

首先, 对现有问题进行巧妙修改以增加问题提出任务的数量. 这是一个相对直接且易于实施的方法. 如可以通过删除部分已知信息或添加引导性语句“你能根据这些信息提出一个相似的问题吗?”或“你能利用这些资料构思出其他问题吗?”来转变问题的性质, 使其成为一个鼓励学生自主提问的任务.

其次, 设计更具挑战性和深度的问题提出任务, 为学生提供更为丰富和深入的学习机会. 精心构建问题情境, 设计能够激发学生思考和提问

欲望的任务. 这样的任务有助于学生提出一系列难度各异的问题, 从而促进他们的思维发展和问题解决能力.

最后, 要全面考虑问题提出任务在类型、领域和年级上的分布, 确保在整个教材中实现平衡且连续的分布. 这样做有助于确保学生不同阶段都能接触到问题提出的任务, 从而培养他们的提问习惯和批判性思维能力, 同时也有助于实现教材内容的连贯性和系统性.

参考文献

- [1] 徐冉冉, 袁晓丽, 姚一玲, 等. 基于教师—研究者伙伴关系的初中数学教学改进——以“一次函数”“问题提出教学”为例[J]. 数学教育学报, 2021, 30(01): 25-31.
- [2] 陈婷, 孙彬博, 张彩云. 百年高中数学课程能力目标发展的回眸与反思——基于课程标准(教学大纲)的文本分析[J]. 数学教育学报, 2019, 28(06): 5-9+54.
- [3] 中华人民共和国教育部. 全日制普通高级中学数学教学大纲(供试验用)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1996.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.
- [5] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [6] Stein, M. K., & Smith, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice[J]. Mathematics Teaching in the Middle School, 1998, 268-275.

(收稿日期: 2024-08-18)