

数学试题

时间：120 分钟

满分：150 分

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

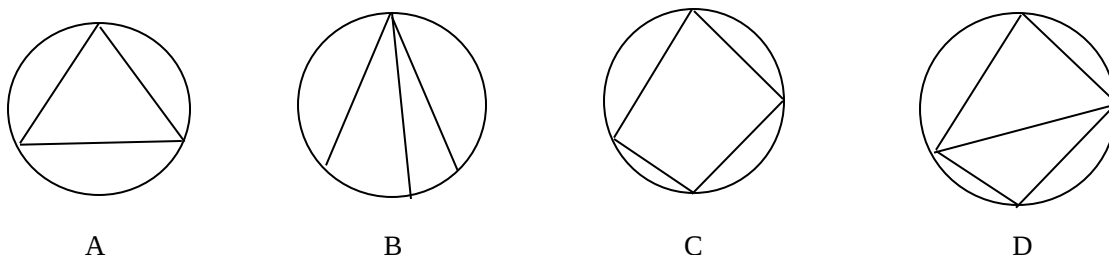
1. 若复数 z 满足 $z(1-i) = |\sqrt{3}+i|$ ，则在复平面内 z 对应的点位于（ ）
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5=1$ ， $a_9=81$ ，则 $a_7 =$ （ ）
A. 9 B. 9 或 -9 C. 27 D. 27 或 -27
3. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $AC=2$ ，点 O 为 BC 边的中点，则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ （ ）
A. 12 B. 6 C. -6 D. -12
4. 已知圆锥的母线长为 $3\sqrt{2}$ ，其侧面展开图是一个面积为 6π 的扇形，则该圆锥的体积是（ ）
A. $\frac{4\pi}{3}$ B. $\frac{8\pi}{3}$ C. 4π D. 8π
5. 体育节的某项比赛，在十二进六的淘汰赛中，12 名参赛同学成绩各不相同，小明同学已经知道了自己的成绩，为了判断自己是否能进入决赛，他还需要知道 12 名同学成绩的（ ）
A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差
6. 设 $(x^2-3x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ ，则 a_1 等于（ ）
A. 80 B. -80 C. -160 D. -240
7. 已知 P 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上的一动点，过 P 作圆 $(x-2)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 的切线，切点分别为 A, B ，则 $\angle APB$ 的最大值为（ ）
A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$
8. 已知 $M = \{\alpha \mid f(\alpha) = 0\}$ ， $N = \{\beta \mid g(\beta) = 0\}$ ，若存在 $\alpha \in M$ ， $\beta \in N$ ，使得 $|\alpha - \beta| < n$ ，则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为“ n 度零点函数”，若 $f(x) = 3^{2-x} - 1$ 与 $g(x) = x^2 - ae^x$ 互为“1 度零点函数”，则实数 a 的取值范围为（ ）
A. $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e}]$ B. $(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}]$ C. $[\frac{4}{e^2}, \frac{2}{e})$ D. $[\frac{4}{e^3}, \frac{2}{e^2})$

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 现有甲、乙两组数据，甲组数据为： $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ ；乙组数据为： $3x_1 - 9, 3x_2 - 9, \dots, 3x_{16} - 9$ ，若甲组数据的平均数为 m ，标准差为 n ，极差为 a ，第 60 百分位数为 b ，则下列说法一定正确的是（ ）

- A. 乙组数据的平均数为 $3m - 9$ B. 乙组数据的极差为 $3a$
C. 乙组数据的第 60 百分位数为 $3b - 9$ D. 乙组数据的标准差为 n

10. 在下面四个图中，能一笔画成的图形有（ ）



11. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, ($a < 0$), 其中 $A_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$ 是其图象上四个不重合的点，直线 A_0A_3 为函数 $f(x)$ 在点 A_0 处的切线，则（ ）

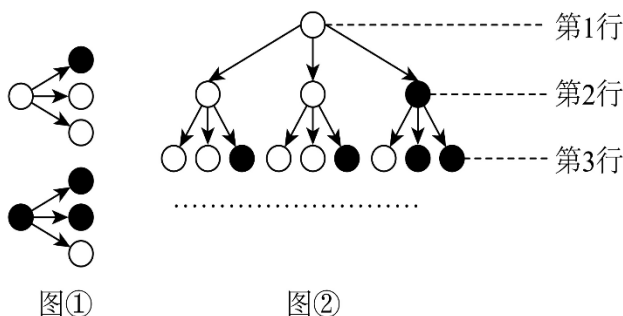
- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(0, \frac{1}{4})$ 中心对称
B. 函数 $f(x)$ 的极大值有可能小于零
C. 对任意的 $x_1 > x_0 > 0$ ，直线 A_0A_3 的斜率恒大于直线 A_0A_1 的斜率
D. 若 A_1, A_2, A_3 三点共线，则 $x_1 + x_2 = 2x_0$.

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知直线 $l_1: ax + 2y - 3 = 0$ 与 $l_2: 3x + (1 - a)y + 4 = 0$ ，若 $l_1 \perp l_2$ ，则实数 a 的值为_____.

13. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2) + \frac{1}{3^{|x|} + 1}$ ，若 $f(2x + 1) \geq f(x)$ ，则实数 x 的取值范围是_____.

14. 分形几何学是美籍法国数学家伯努瓦-曼德
尔布罗特在 20 世纪 70 年代创立的一门新学科，
它的创立为解决传统科学领域的众多难题提供
了全新的思路. 下图展示了如何按照图①的分
形规律生长成一个图②的树形图，则在图②中
第 2025 行的黑心圈的个数是_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $\sin C(1 + \cos B) = \sin B(2 - \cos C)$, 求 $\frac{c}{b}$ 的值.

16. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y = x + 2$, 求 a 的值;

(2) 当 $a \geq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值.

17. (本小题满分 15 分)

某企业招聘员工, 指定“英语听说”“信息技术”“逻辑推理”作为三门考试课程, 有两种考试方案.

方案一: 参加三门课程的考试, 至少有两门及格为通过;

方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 并参加这两门课程的考试, 两门都及格为通过.

假设某应聘者参加三门指定课程考试及格的概率分别是 p_1, p_2, p_3 ($p_i \in (0, 1), i = 1, 2, 3$), 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.

(1) 分别求该应聘者选方案一考试通过的概率 T_1 和选方案二考试通过的概率 T_2 ;

(2) 试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小, 并说明理由.

18. (本小题满分 17 分)

如图, 已知半圆 $C_1: x^2 + y^2 = b^2 (y \leq 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 E 点, 半椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

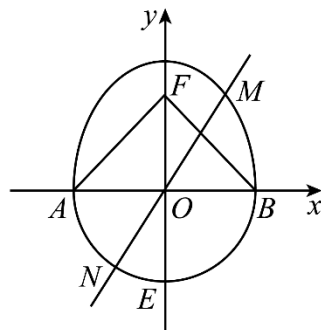
($y > 0, a > b > 0$) 的上焦点为 F , 并且 $\triangle ABF$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边

三角形, 将由 C_1, C_2 构成的曲线, 记为“ Γ ”.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 直线 $l: y = \sqrt{2}x$ 与曲线 Γ 交于 M, N 两点, 在曲线 Γ 上再取两点 S, T (S, T 分别在直线 l 两侧), 使得这四个点形成的四边形 $MSNT$ 的面积最大, 求此最大面积;

(3) 设点 $K(0, t) (t \in \mathbb{R})$, P 是曲线 Γ 上任意一点, 求 $|PK|$ 的最小值.



19. (本小题满分 17 分)

已知 $n \geq 4$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$, 设 S 是空间中 n 个不同的点构成的集合, 其中任意四点不在同一个平面上, d_{AB} 表示点 A, B 间的距离, 记集合 $\tau(S) = \{d_{AB} \mid \forall A, B \in S, A \neq B\}$.

(1) 若四面体 $ABCD$ 满足: $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, 且 $AB = BC = CD = 1$

① 求二面角 $C-AD-B$ 的余弦值;

② 若 $S = \{A, B, C, D\}$, 求 $\tau(S)$

(2) 证明: $4\text{card}(\tau(S)) \geq n-1$

参考公式: $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$