

高中数学“四能”的理解与培养

杨 美 江苏省高邮市三垛中学 225600

[摘 要]《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》强调数学教学应致力于培养学生的“四能”。实现“四能”培养目标的关键在于学生是否有机会体验“四能”。在教学过程中,必须关注学生是否具有发现问题的意识和提出问题的空间,以及学生是否具备分析问题的逻辑思维与解决问题的思路。教师需要形成对“四能”的正确理解,并明确培养路径。“四能”是我国数学教学的优秀传统,在核心素养培育的背景下应当得到继承。让学生保持敏锐的问题发现意识,并通过建立模型等方法获得问题解决的思路,是“四能”得到培养的充分体现,同时也是数学学科核心素养得到培育的重要标志。

[关键词] 高中数学;发现问题;提出问题;分析问题;解决问题

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》在“课程目标”中明确提出,高中数学教学要“提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力”(简称“四能”)。经验丰富的高中数学教师普遍认为,我国数学教学的传统就是重视问题的发现与提出、分析与解决。既然是传统,是不是就没有分析和重视的价值与意义呢?答案并非如此。由于种种因素的存在,尤其是应试压力的存在,当前高中数学教学基本上都在考试这根“指挥棒”的作用下运行。从国家选拔人才的角度来看,这样的选择本无可厚非,但是如果完全基于应试需要而进行教学,就会发现“四能”在课堂上几乎无容身之地。教师通常会选择在最短的时间内完成知识教学,然后通过大量的试题训练,培养学生的知识运用能力(实际上是解题能力)。这样的教学形态是典型的应试教育,其不利于“四能”的培养,

自然也不利于数学学科核心素养的培育。高中数学教学应聚焦于培养“四能”,以此优化数学知识的教授和应用,促进学生数学学科核心素养的发展。

基于上述分析可以发现,在高中数学教学中,如何帮助学生提升数学思维能力,学会用数学方法分析问题和解决问题,探讨提升学生数学思维能力的策略,是高中数学教师面临的一个重要课题。面对这一课题,每一个高中数学教师都应当在核心素养的视角下,对“四能”进行全面且具有一定深度的解读,并且寻找到有效的培养途径。以下是笔者结合理论学习和实践经验的一些见解,期待专家和同行的批评与指正。

◎ 核心素养视角下的“四能”再解读

从新课标的描述来看,关于“四

能”的描述就是传统且一贯的描述,似乎从中无法挖掘出更多的新意。诚然,文字的描述确实看不出太多新意,但如果结合教学现状来看“四能”培养,就可以发现其中存在着很多需要解读与研究的空间。

从宏观角度来看,“四能”极具研究价值。在课堂教学中创设生活情境,并运用启发性提示语,采用合作学习的方式,重视学生思维的培养,可以进一步激发学生的学习动机,培养学生的“四能”,发展学生的数学学科核心素养。这样的宏观阐述所体现出来的逻辑是:“四能”对学生的学习而言,不仅是能力的培养,还呼应着数学学科核心素养的发展。而这显然只是学生的成长目标,能否达到这样的目标,最关键的一点就是学生是否有“四能”的体验空间。具体阐述如下:

其一,学生是否具有发现问题的意识和提出问题的空间?

作者简介: 杨美(1984—),本科学历,中学高级教师,从事高中数学教学工作。

可以说,人生充满了探索的渴望,但随着教育的增加,学生提出问题的能力却似乎减弱了,这可能是因为他们的提问空间变小了.学生在课堂及学习过程中若无提问机会,易丧失发现问题的意识.面对这一现实,教师有必要思考,在自己的课堂上,学生是否具备敏锐的发现问题的意识?是否有机会提出问题?

面对这些问题可以发现,落实核心素养的关键在于培养学生的“四能”.首要任务是为学生创造更广阔的提问空间,以逐步恢复他们的提问意识.这意味着我们需要超越传统的教学方法,思考如何在教授每个数学知识点时,为学生创造提问空间,并引导他们的思维参与新知识的构建,以便在学习过程中发现新问题.因此,培养“四能”的首要问题,不是培养学习技巧的问题,而是传授学习理念与学习意识的问题,是教师“放权”让学生有发现问题和提出问题的空间与可能性的问题.

其二,学生是否具备分析问题的逻辑思维与解决问题的思路?

数学问题通常逻辑严密,学生分析时需识别逻辑关系,并据此演绎,建立条件与解决方案之间的联系.这一通道很多时候都不是唯一的,培养学生分析问题能力时,需确保他们思路开放,以便在分析过程中广泛调动知识,形成解决问题的多种逻辑尝试.从分析问题到解决问题,实际上是一个从猜想到验证的过程,需要学生用有形的数学语言来表征解决问题的思路,这是学生“四能”从内隐走向外显的关键步骤.

需要指出的是,从发现与提出问题,到分析与解决问题,不是一个简单的线性过程,可能会有螺旋上升或来回往复的情况.这很容易带来“浪费时间”的感觉,此时考验教师的定力与引导力,而定力与引导力又需要在实践中慢慢积累,这对于教师而言同样是一个实践出真理的过程.

基于核心素养的“四能”培养

在核心素养的视角下看高中数学教学,一要从宏观层面围绕必备品格与关键能力的培养以寻找支撑,二要从微观层面围绕数学抽象、逻辑推理、数学建模等六个要素寻找支撑.通过相关的理论研究可以发现,“四能”就可以发挥这一支撑作用.在教学中,教师若深入理解新课标,并将培养学生的“四能”融入数学教学全过程,贯穿每一节课,就能为学生数学素养的发展奠定基础.

举一个例子,人教A版(2019)普通高中数学教科书必修第一册中的“函数的概念与性质”,有“探索与发现”这一栏目,内容是“探究 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与性质”.这项任务对于大多数学生而言颇具挑战性,但克服它有助于培养“四能”.下面谈谈笔者的相关分析与教学设计.

1. 内容分析

图象与性质是描述函数的两个切入口,同时也对应着数与形.观察函数图象帮助学生直观理解其性质,而用数学语言精确描述这些性质,则能让他们更准确地表达对函数的理解.高中生在初中已经学习了基础函数,并通过图象和性质对其有了直观理解.到了高中,他们将掌握更复杂的函数知识.

在此基础上,当学生面对函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 时,自然会遇到新的挑战.挑战感的形成对学生来说是非常有趣的,因为大多数学生最初不觉得这个函数复杂,只有少数解题经验丰富的学生理解“题目越简单反而越难”的道理.部分学生最初以为这是 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的组合,但很快意识到,无论是作图象还是描述性质,问题的解决远不止简单的组合. $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 分别是正比例函数与反比例函数,学习幂函数后,大多数学生知道这两个函数本质

上是幂函数.在教学中,若能引导学生了解函数的四则运算及其结果,则学生在此基础上就会形成新的问题意识,并利用数学语言(其中也有生活语言)将这些问题表达出来.以 $y=x+\frac{1}{x}$ 为例,学生提出的问题就是:

函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象和性质是否与 $y=x$

和 $y=\frac{1}{x}$ 存在联系?在研究新函数的

图象与性质时应当遵循怎样的思路?

在发现并提出这些问题后,就要想方设法去分析和解决问题.分析问题的逻辑,很大程度上取决于学生已经掌握的知识,以及在知识掌握过程中所形成的数学解决方法.函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 虽然看似简单,但学生在理

解其图象与性质时缺乏方法支撑,导致在分析和解决问题时遇到了困难.在这种情况下,相应的教学设计可以分为两段:一是引导学生自主探究;二是借助应用软件生成图象.这样,既能尊重学生的主体性,又可以借助现代教学手段来验证学生的探究结果,从而保证学生有一个良好的学习体验.

2. 教学设计

具体教学可分为以下三个环节.

环节1 直接给出函数 $y=x+\frac{1}{x}$,

然后提出问题:根据你所学过的函数,你觉得该函数的图象是什么样子的?该函数具有怎样的性质?

此时学生的思维出发点一定在 $y=x$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 上,好奇这两个函数图象的叠加结果.

环节2 引导学生自主探究 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与性质.这一环节对应问题的分析与解决,最有效的策略就是让学生首先从宏观角度建立感性认识.例如,通过代入坐标点,使用描点法绘制图象,确定关键点的位置,从而构建图象的大致轮廓.学生的先

前知识和方法基础能使他们自主得出结论,并构建对问题的基本理解.例如,探究第一象限图象时,部分学生发现 $x>0$ 时 $x+\frac{1}{x}\geq 2$, $x=0$ 时没有函数值,这可以让学生猜想函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象的相似之处……

探究函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的性质,可从定义入手,这要求学生具备一定的知识和方法基础,从而能主动参与.过程相似,不再详述.

环节3 使用图象生成软件,输入函数表达式创建图象,供学生将自己所作的图象与之对比.对于探究结果正确的学生,这能增加他们的成就感;而对于探究结果有误的学生,

在认知失衡的驱动下,可以反思探究过程,找到改进的切入点.

“四能”对核心素养的支撑作用

从“四能”培养角度来看上述教学案例,其内容设计能有效促进学生提问意识的形成.其中的逻辑可以用相关的心理学知识来解答.例如,当学生的认知平衡被打破时,学生就容易产生问题.在这种情况下,引导学生用数学语言来描述自己的问题,不仅能培养学生提出问题的能力,而且客观上还能提升他们运用数学语言的能力.这与数学学科核心素养培育的目标是完全一致的.在分析和解决数学问题时,利用学生已有的知识和方法,逐步建立数学模型,再通过不同的评价方式巩固学生的探究发现,尤其是强化学生的成就动机,

有助于提升他们分析和解决问题的能力.例如,在上述教学案例中,学生用特定点(即描点法)去探索函数图象,再用函数图象去推测函数性质,这是解决问题的有效方法.解决问题的过程,本质上就是数学模型的构建与优化过程.这一过程伴随着数学学科核心素养的逐步提升.

总而言之,当前高中数学课程教学的核心就是培养学生的“四能”.“四能”是我国数学教学的优良传统,应在核心素养培育背景下得到传承.在培养学生“四能”的过程中,要让他们明白所有学科都涉及问题的发现与提出、分析与解决.这有助于他们保持对问题的敏感性,并学会通过建立模型等方法寻找解决问题的途径.这对学生数学学科核心素养的培养起着重要的支持作用.

(上接第64页)

(2)如果 $AQ \perp PB$, Q 为垂足,求证: $NQ \perp PB$.

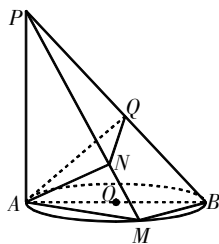


图7

证明 (1)由于 AB 为 $\odot O$ 的直径,因此 $AM \perp BM$.由于 PA 与平面 BMA 垂直,因此 $PA \perp BM$.又 $PA \cap AM=A$,所以 BM 与平面 PAM 垂直.因为 ANC 平面 PAM ,所以 $BM \perp AN$.由 $AN \perp PM$, $PM \cap BM=M$,可得 AN 与平面 BMP 垂直.

(2)由(1)问可知, AN 与平面 BMP 垂直,结合 $PB \subset$ 平面 BMP ,可得 PB 与平面 ANQ 垂直.又 $NQ \subset$ 平面 ANQ ,所以 $NQ \perp PB$.

设计意图 上述两个练习意在引

导学生灵活转化与融合新旧知识,感知转化思想在解决实际问题中的重要性.通过积极思考与讨论,实现不同层级的发展.

4. 归纳总结,完善认知

师:说说你们在本节课中学到的数学知识、数学方法和数学思想.

学生回顾直线与平面垂直的定义与判定定理,并从数学知识、数学方法和数学思想三方面展开分析,构建思维导图(如图8所示).

无限问题 $\Rightarrow$ 有限问题
线面垂直 $\Leftrightarrow$ 线线垂直
空间问题 $\Rightarrow$ 平面问题

图8

设计意图 该过程旨在培养学生归纳、总结与反思能力,引导学生从宏观角度审视学习成果,巩固知识,为发展核心素养打基础.

教学思考

教师从明暗双线展开教学,明线

为直线与平面垂直的定义、判定定理及应用情况;暗线是上述过程所蕴含的转化与化归思想.从直线与平面垂直的定义到判定定理的探究,展现了从抽象到具体的转化,揭示了从空间到平面的化归,凸显了线线垂直与线面垂直的关系.

课程遵循“直观感知—操作确认—归纳总结”的流程,通过紧密相连的活动,引领学生思维向纵深发展.课堂贯彻“以生为本”理念,从旗杆问题的引入到直线与平面垂直的定义和判定定理的探索,鼓励学生自主思考、合作研究.在和谐民主的氛围中,学生积极参与,锻炼直观想象素养.

总之,数学教学是一种艺术.教师应更新教学理念,紧跟时代,基于学情设计教学方案,这是发展学生数学学科核心素养、培养学生可持续发展能力的重要途径.