江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第二学期高三数学学科导学案
直线与圆锥曲线的综合问题

研制人：徐广俊　　审核人：陈宏强

班级：__________ 姓名：__________ 学号：________ 授课日期：

【考情分析】

综观近几年的新高考试题，客观题以考查圆锥曲线的方程与性质为主，解答题主要以双曲线、椭圆、抛物线为背景考查斜率及面积问题、方程求解及劣构性问题、定值问题、最值与范围问题等.

【真题感悟】

1.（多选）（2023·新高考Ⅱ卷）设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}\left(x-1\right)$ 过抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则下列结论正确的有（　　）

A．$p=2$　　　　B．$MN=\frac{8}{3}$

C．以 MN 为直径的圆与 l 相切　　　　D．$\triangle OMN$ 为等腰三角形

2．(2022·浙江卷)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 且斜率为 $\frac{b}{4a}$ 的直线交双曲线于点 $A\left(x_1,y_1\right)$，交双曲线的渐近线于点 $B\left(x_2,y_2\right)$，且 $x_1<0<x_2$．若 $FB=3FA$，则双曲线的离心率是________.

3．(2022·新高考Ⅱ卷)已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，直线 l 与椭圆在第一象限交于 A，B 两点，与 x 轴、y 轴分别交于 M，N 两点，且 $MA=NB$，$MN=2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为________________.

【典例导引】

例 1．（2024·新课标全国Ⅰ卷）已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点.

（1）求 C 的离心率;

（2）若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 ΔABP 的面积为 9，求 l 的方程.

例 2．（2024·河北廊坊市二模）在平面直角坐标系中，已知点$P(2,1)$是抛物线$C: x^2=2py(p>0)$上的一点，直线l交C于A,B两点.

（1）若直线l过C的焦点，求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的值；

（2）若直线PA,PB分别与y轴相交于M,N两点，且$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1$，试判断直线$l$是否过定点？若是，求出该定点的坐标；若不是，请说明理由.

例 3．（2023·全国甲卷）已知直线$x-2y+1=0$与抛物线$C: y^2=2px(p>0)$交于A,B两点，且$AB=4\sqrt{15}$.

（1）求p的值；

（2）设F为C的焦点，M，N为C上两点，且$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求$\triangle MFN$面积的最小值.

江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第二学期高三数学学科作业
直线与圆锥曲线的综合问题

研制人：徐广俊　　审核人：陈宏强

班级：____________ 姓名：_____________学号：_________时长：60 分钟

1．（2023·全国乙卷）已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点 $A\left(-2,0\right)$ 在 C 上．

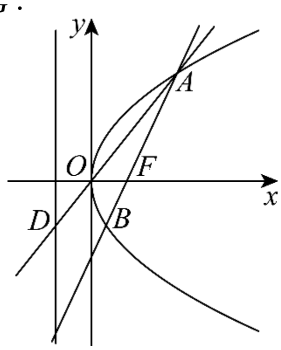
（1）求 C 的方程；

（2）过点 $\left(-2,3\right)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与 y 轴的交点分别为 M，N，证明：线段 MN 的中点为定点．

2．（2024·湖北武汉市二模）如图，O 为坐标原点，F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，过 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，直线 AO 交抛物线的准线于点 D，设抛物线在点 B 点处的切线为 l．

（1）若直线 l 与 y 轴的交点为 E，求证：$DE=EF$；

（2）过点 B 作 l 的垂线，与直线 AO 交于点 G，求证：$AD^2=AO\cdot AG$．



3．（2024·河北沧州市一模）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为$D(0,2)$，直线$l:y=kx$与椭圆$C$交于$A,B$两点，且直线$DA$与$DB$的斜率之积为$-\frac{1}{3}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若直线$l'//l$，直线l'与椭圆C交于M,N两点，且直线DM与DN的斜率之和为1，求l'与l之间距离的取值范围.

4．（2023·广东梅州一模）已知动圆M经过定点$F_1(-\sqrt{3},0)$，且与圆F_2：$(x-\sqrt{3})^2+y^2=16$内切.

（1）求动圆圆心M的轨迹C的方程；

（2）设轨迹C与x轴从左到右的交点为点A,B，P为轨迹C上异于A,B的动点，设PB交直线$x=4$于点T，连结AT，交轨迹C于点Q．直线AP，AQ的斜率分别为k_{AP}，k_{AQ}.

①求证：$k_{AP}\cdot k_{AQ}$为定值；

②证明：直线PQ经过x轴上的定点，并求出该定点的坐标.