

江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第二学期高三数学学科导学案

直线与圆锥曲线的位置关系

研制人：居璇 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

【考情分析】

直线与圆锥曲线常以单选题、多选题、填空题、解答题 4 类题型进行考查，客观题难度中等或以上，解答题难度较难。综观近几年的新高考试题，客观题以考查圆锥曲线的方程与性质为主，解答题主要以双曲线、椭圆、抛物线为背景考查斜率及面积问题、方程求解及劣构性问题、定值问题、最值与范围问题等。

【真题感悟】

1. (2023 · 全国乙卷) 设 A, B 为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点，下列四个点中，可为线段 AB 中点的是 ()
A. $(1, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(1, 3)$ D. $(-1, -4)$
2. (2023 · 新高考 II 卷) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 $y = x + m$ 与 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍，则 $m =$ ()
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
3. (多选题) (2022 · 新高考 I 卷) 已知 O 为坐标原点，点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上，过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点，则下列结论正确的有 ()
A. C 的准线为 $y = -1$ B. 直线 AB 与 C 相切
C. $OP \cdot OQ > OA^2$ D. $BP \cdot BQ > BA^2$
4. (2024 · 新课标全国 I 卷) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 作平行于 y 轴的直线，交 C 于 A, B 两点，若 $F_1A = 13, AB = 10$ ，则 C 的离心率为_____.

【典例导引】

- 例 1. (2023 · 广东佛山二模) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A ，焦距为 4，过右焦点 F 作垂直于实轴的直线，交 C 于 B, D 两点，且 $\triangle ABD$ 是直角三角形.
- (1) 求双曲线 C 的方程；
 - (2) M, N 是 C 右支上的两动点，设直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，若 $k_1 k_2 = -2$ ，求点 A 到直线 MN 的距离 d 的取值范围.

例 2. (2024 · 山东烟台市一模) 在平面直角坐标系中, 已知点 $P\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的上顶点 A 作两条动直线 $l_1: y = k_1x + 1, l_2: y = k_2x + 1$ ($0 < k_1 < k_2$), 分别与 C 交于另外两点 M, N . 且当 $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $AM = PM$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $k_1k_2 = 1, \frac{MN}{NP} = \frac{9}{8}$, 求 k_1 和 k_2 的值.

例 3. (2023 · 广东深圳二模) 已知斜率存在的直线 l 过点 $P(1, 0)$, 且与抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 交于 A, B 两点.

(1) 若直线 l 的斜率为 1, M 为线段 AB 的中点, M 的纵坐标为 2, 求抛物线 C 的方程;

(2) 若点 Q 也在 x 轴上, 且不同于点 P , 直线 AQ, BQ 的斜率满足 $k_{AQ} + k_{BQ} = 0$, 求点 Q 的坐标.

江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第二学期高三数学学科作业

直线与圆锥曲线的位置关系

研制人：居璇 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时长：60 分钟

- (2023·广东广州二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 过点 $(-a, 0)$ 且方向向量为 $\vec{n} = (1, -1)$ 的光线, 经直线 $y = -b$ 反射后过 C 的右焦点, 则 C 的离心率为 ()
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
- (2023·山东青岛考二模) 已知 O 为坐标原点, 直线 l 过抛物线 $D: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F , 与 D 及其准线依次交于 A, B, C 三点 (其中点 B 在 A, C 之间). 若 $AF = 4$, $BC = 2BF$, 则 $\triangle OAB$ 的面积是 ()
A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
- (多选题) (2023·广东茂名二模) 已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆的上顶点和右顶点分别为 A, B , 点 P, Q 都在 C 上, 且 $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OQ}$, 则下列说法正确的有 ()
A. $\triangle PQF_2$ 周长的最小值为 14 B. 四边形 PF_1QF_2 可能是矩形
C. 直线 PB, QB 的斜率之积为定值 $-\frac{9}{16}$ D. $\triangle PQF_2$ 面积的最大值为 $3\sqrt{7}$
- (多选题) (2024·江苏盐城市三模) 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l_1 交 E 于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, E 在 B 处的切线为 l_2 , 过 A 作与 l_2 平行的直线 l_3 , 交 E 于另一点 $C(x_3, y_3)$, 记 l_3 与 y 轴的交点为 D , 则下列结论正确的有 ()
A. $y_1 y_2 = 1$ B. $x_1 + x_3 = 3x_2$
C. $AF = DF$ D. $\triangle ABC$ 面积的最小值为 16
- (2024·河北张家口市三模) 已知抛物线 $x^2 = 2y$ 的焦点为 F , O 为坐标原点, 直线 $y = 2x + t$ 与该抛物线交于 M, N 两点, 且 $OM \perp ON$, 则 $MF + NF =$ _____.
- (2023·辽宁鞍山二模) 抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的点 $M(1, y_0)$ 到抛物线 C 的焦点 F 的距离为 2, A, B (不与坐标原点 O 重合) 是抛物线 C 上两个动点, 且 $OA \perp OB$.
(1) 求抛物线 C 的标准方程.
(2) x 轴上是否存在点 P , 使得 $\angle APB = 2\angle APO$? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

7. (2023·黑龙江哈尔滨二模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F , 过点 F 的直线 l 交双曲线 C 于 A, B 两点, 且当直线 l 垂直于 x 轴时, $AB = \frac{2a}{3}$.

(1) 求此双曲线的离心率;

(2) 若点 F 到此双曲线一条渐近线的距离为 1, 且以 AB 为直径的圆被 x 轴截得弦长为 $2\sqrt{2}$, 求直线 l 方程.

8. (2023·广东汕头二模) 如图, $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ 为双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 抛物线 C_2 的顶点为坐标原点, 焦点为 F_2 , 设 C_1 与 C_2 在第一象限的交点为 $P(m, n)$, 且 $PF_1 = 7$, $PF_2 = 5$, $\angle PF_2F_1$ 为钝角.

(1) 求双曲线 C_1 与抛物线 C_2 的方程.

(2) 过 F_2 作不垂直于 x 轴的直线 l , 依次交 C_2 、 C_1 的右支于 A, B, C, D 四点, 设 M 为 AD 的中点, N 为 BC 的中点, 试探究 $\frac{AD \cdot NF_2}{BC \cdot MF_2}$ 是否为定值. 若是, 求此定值; 若不是, 请说明理由.

