

江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第二学期高三数学学科导学案

圆锥曲线的方程与几何性质

研制人：周纯阳 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

【考情分析】

直线与圆锥曲线常以单选题、多选题、填空题、解答题 4 类题型进行考查，客观题难度中等或以上，解答题难度较难. 综观近几年的新高考试题，客观题以考查圆锥曲线的方程与性质为主，解答题主要以双曲线、椭圆、抛物线为背景考查斜率及面积问题、方程求解及劣构性问题、定值问题、最值与范围问题等.

【真题感悟】

- (2022·全国乙卷·理科) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3, 0)$. 若 $AF = BF$ ，则 $AB =$ ()
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$
- (2023·新高考I卷) 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 .
若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ ，则 $a =$ ()
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
- (2023·天津卷) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过 F_2 作其中一条渐近线的垂线，垂足为 P . 已知 $PF_2 = 2$ ，直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，则双曲线的方程为 ()
A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$
- (2024·全国甲卷) 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上、下焦点分别为 $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ ，点 $P(-6, 4)$ 在该双曲线上，则该双曲线的离心率为 ()
A. 4 B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

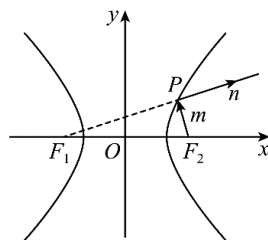
【典例导引】

例 1. (1) (2023·广东深圳二模) 已知 M 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上的动点， N 为圆 $x^2 + (y-4)^2 = 5$ 上的动点，则点 M 到 y 轴的距离与点 M 到点 N 的距离之和最小值为_____.

(2) (多选) (2023·湖南邵阳三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为

F_1, F_2 ，双曲线具有如下光学性质：如图所示，从右焦点 F_2 发出的光线 m 交双曲线右支于点 P ，经双曲线反射后，反射光线 n 的反向延长线过左焦点 F_1 . 若双曲线 C 的一条渐近线的方程为 $\sqrt{3}x - y = 0$ ，则下列结论正确的有 ()

- 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$
- 若 $m \perp n$ ，则 $PF_1 \cdot PF_2 = 12$
- 若射线 n 所在直线的斜率为 k ，则 $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 当 n 过点 $M(8, 5)$ 时，光由 $F_2 \rightarrow P \rightarrow M$ 所经过的路程为 10



例 2. (1) (2024 · 山东济南市三模) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点，点 A 在第一象限，点 O 为坐标原点，且 $S_{\triangle AOF} = 2S_{\triangle BOF}$ ，则直线 l 的斜率为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. -1

(2) (2024 · 河北衡水市二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 向圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}b^2$ 引切线，交椭圆于点 P, O 为坐标原点. 若 $OP = OF_2$ ，则椭圆的离心率为

()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

(3) (2023 · 全国甲卷) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$ ， C 的一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 A, B 两点，则 $|AB| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

例 3. (2023 · 广东惠州二模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$ ，且双曲线 C 右支上一动点 $P(x_0, y_0)$ 到两条渐近线 l_1, l_2 的距离之积为 $\frac{4b^2}{5}$ 。

(1) 求双曲线 C 的标准方程；

(2) 设直线 l 是曲线 C 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线，且 l 分别交两条渐近线 l_1, l_2 于 M, N 两点， O 为坐标原点，求 $\triangle MON$ 的面积。

江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第二学期高三数学学科作业

圆锥曲线的方程与几何性质

研制人：周纯阳 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 时长：60 分钟

1. (2023·湖北襄阳一模) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 过其焦点 F 的直线 l 与抛物线分别交于 A, B 两点(点 A 在第一象限), 且 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{FB}$, 则直线 l 的倾斜角为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

2. (2024·浙江绍兴市三模) 已知直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点, 以线段 AB 为直径的圆过椭圆的左焦点 F_1 , 若 $F_1A = 2F_1B$, 则椭圆 C 的离心率是 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{5}{9}$

3. (2024·福建泉州市二模) 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则该椭圆的焦距为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{6}$

4. (2024·福建厦门市二模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 焦距为 $8\sqrt{2}$, 点 P 在双曲线 C 上, $OP = OF_2$, 且 ΔPOF_2 的面积为 8, 则双曲线的离心率为 ()

A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 4

5. (多选题) (2024·湖北襄阳市二模) 抛物线 $C: x^2 = 2py$ 的焦点为 F , P 为其上一动点, 当 P 运动到 $(t, 1)$ 时, $PF = 2$, 直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点, 下列结论正确的是 ()

A. 抛物线的方程为 $x^2 = 8y$ B. 抛物线的准线方程为 $y = -1$
C. 当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切 D. $AF + BF \geq 4$

6. (多选题) (2024·山东淄博市三模) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 坐标原点为 O . 若椭圆 C 上存在一点 P , 使得 $OP = \sqrt{7}$, 则下列说法正确的有 ()

A. $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{3}{5}$ B. $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 5$
C. ΔF_1PF_2 的面积为 2 D. ΔF_1PF_2 的内切圆半径为 $\sqrt{2} - 1$

7. (2023·新高考 I 卷) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点

A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为_____.

8. (2023·湖南怀化一模) 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $PQ = F_1F_2$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

9. (2024·湖南湘潭市一模改编) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 左焦点为 F, M 为 C 上异于 A, B 的一点, 过点 M 且垂直于 x 轴的直线与 C 的另一个交点为 N , 交 x 轴于点 T .

(1) 求证: $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TN}$;

- (2) 求 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$ 的最小值;
 (3) 求 $\triangle FMN$ 周长的最大值.

10. (2023·湖南岳阳三模) 已知点 $(1, 2)$ 在双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线上, 点

$A(-3, 2)$ 在 E 上, 直线 l 交 E 于 B, C 两点, 直线 AB 与直线 AC 的斜率之和为 0.

- (1) 求直线 l 的斜率;
 (2) 若 M 为双曲线 E 上任意一点, 过点 M 作双曲线的两条渐近线的平行线, 分别与两条渐近线交于点 P, Q , 求 $\triangle MPQ$ 的面积.

11. (2023·河北石家庄市统考三模) 已知 M, N 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上不同两点, O 为坐标原点, $OM \perp ON$, 过 O 作 $OH \perp MN$ 于 H , 且点 $H(2, 2)$.

- (1) 求直线 MN 的方程及抛物线 C 的方程;
 (2) 若直线 l 与直线 MN 关于坐标原点对称, Q 为抛物线 C 上一动点, 求 Q 到直线 l 的距离最短时的点 Q 的坐标.