**2024-2025学年高二数学——综合练习（3）**

一、单选题：

1.已知数列$\{a\_{n}\}$满足$a\_{1}=1$，$a\_{n+1}=3a\_{n}+2^{n}(n\in N^{∗})$，$b\_{n}=\frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}.$设$t\in Z$，若对于$∀n\in N^{∗}$，都有$b\_{n}>t$恒成立，则$t$的最大值为(    )

A. $3$ B. $4$ C. $7$ D. $9$

2.已知$A(−2,0)$，$B(2,0)$，若圆$(x−a−1)^{2}+(y−3a+2)^{2}=4$上存在点$P$满足$\vec{PA}⋅\vec{PB}=5$，则$a$的取值范围是(    )

A. $[−1,2]$ B. $[−2,1]$ C. $[−2,3]$ D. $[−3,2]$

二、多选题：

3.已知$F$为椭圆$C:\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{2}=1$的左焦点，直线$l:y=kx(k\ne 0)$与椭圆$C$交于$A,B$两点，$AE⊥x$轴，垂足为$E,BE$与椭圆$C$的另一个交点为$P$，则(     )

A. $\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}$的最小值为$3$

B. $▵ABE$面积的最大值为$\sqrt[ ]{2}$
C. 直线$BE$的斜率为$\frac{1}{2}k$

D. $∠PAB$为直角

  4.记等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，数列$\{\frac{S\_{n}}{n}\}$的前$k$项和为$T\_{k}$，已知当且仅当$n=7$时，$S\_{n}$取得最大值，则(     )

A. 若$S\_{6}<S\_{8}$，则当且仅当$k=14$时，$T\_{k}$取得最大值
B. 若$S\_{6}>S\_{8}$，则当且仅当$k=15$时，$T\_{k}$取得最大值
C. 若$S\_{6}=S\_{8}$，则当$k=13$或$k=14$时，$T\_{k}$取得最大值
D. 若$∃m\in N^{∗}$，$S\_{m}=0$，则当$k=13$或$k=14$时，$T\_{k}$取得最大值

三、填空题：

5.数列$\left\{a\_{n}\right\}$的前$n$项和$S\_{n}$，首项为$1$，对于任意正整数$n$，都有$a\_{n+1}=\left\{\begin{matrix}2a\_{n},n<5\\a\_{n}−2,n\geq 5\end{matrix}\right.$，则$S\_{20}=$           ．

6.过点$F\left(0,\frac{1}{2}\right)$的直线$l$与抛物线$x^{2}=2y$交于$A$，$B$两点，则$\left|AF\right|+4\left|BF\right|$的最小值为          ．

四、解答题：

7.设正项数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项之和$b\_{n}=a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{n}$，数列$\{b\_{n}\}$的前$n$项之积$c\_{n}=b\_{1}b\_{2}…b\_{n}$，且$b\_{n}+c\_{n}=1$．

$(1)$求证：$\left\{\frac{1}{c\_{n}}\right\}$为等差数列，并分别求$\{a\_{n}\}$、$\{b\_{n}\}$的通项公式；

$(2)$设数列$\left\{a\_{n}·b\_{n+1}\right\}$的前$n$项和为$S\_{n}$，不等式$S\_{n}>\frac{1}{λ}+λ−3$对任意正整数$n$恒成立，求正实数$λ$的取值范围．



9.已知$⊙C:(x−a)^{2}+(y−b)^{2}=r^{2}(0<a<2,r>0)$与两坐标轴均相切，且过点$(2,1)$．直线$l$过点$P\left(−1,1\right)$交圆$C$于$A,B$两点．

$(1)$求圆$C$的方程； $(2)$若$2S\_{ΔPAC}=S\_{ΔPBC}$，求直线$l$的斜率$k$．

10.椭圆$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a>b>0\right)$的左右焦点分别为$F\_{1}$、$F\_{2}$，短轴端点分别为$A$、$B.$若四边形$AF\_{1}BF\_{2}$为正方形，且$AF\_{1}=\sqrt[ ]{2}$．

$(1)$求椭圆的离心率；

$(2)$若$C$、$D$分别是椭圆长轴左、右端点，动点$M$满足$\vec{MD}⋅\vec{MC}=\vec{MD}^{2}$，$P$点在椭圆上，且满足$\vec{OP}=sin^{2}θ\vec{OC}+cos^{2}θ\vec{OM}$，求$\vec{OM}⋅\vec{OP}$的值$(O$为坐标原点$)$；

$(3)$在$(2)$条件下，试问在$x$轴上是否存在异于$C$点的定点$N$，使$PD⊥MN$，若存在，求出点$N$的坐标，若不存在，说明理由．

