

解析几何

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

- 已知 $A(-2,0), B(4,a)$ 两点到直线 $l: 3x-4y+1=0$ 的距离相等, 则 $a = (\quad)$
 A. 2 B. $\frac{9}{2}$ C. 2 或 -8 D. 2 或 $\frac{9}{2}$
- 线段 AB 是圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 的一条直径, 直线 $x - 2y + 10 = 0$ 上有一动点 P , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 $(\quad)$
 A. 9 B. 10 C. 11 D. 12
- 已知抛物线 $y^2 = -12x$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点重合, 则 $a = (\quad)$
 A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{13}$ C. 5 D. $2\sqrt{5}$
- 如图, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, P 为椭圆上的点, PT 为 $\triangle F_1PF_2$ 的外角平分线, $F_2T \perp PT$, 则 $|OT| = (\quad)$
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 4
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线分别相交于点 A, B 两点, O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $p = (\quad)$
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 抛物线有如下光学性质: 过焦点的光线经抛物线反射后得到的光线平行于抛物线的对称轴; 反之, 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px$ ($0 < p < 4$), 一条平行于 x 轴的光线从点 $A(8, 2p)$ 射出, 经过抛物线 E 上的点 B 反射后, 与抛物线 E 交于点 C , 若 $\triangle ABC$ 的面积是 10, 则 $p = (\quad)$
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2
- 双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的实轴为直径的圆记为 D , 过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为 $(\quad)$
 A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

8.如图,在 $\triangle ABC$ 中, M 是 AC 的中点, N 在边 BC 上,且 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$, BM 与 AN 交于点 P ,

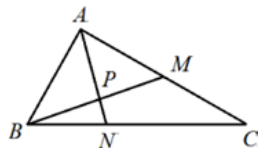
若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 24\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PN}$,则 $\frac{|AB|}{|BC|}$ 的值是()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 3



二、多项选择题(本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分)

9. 若方程 $\frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 所表示的曲线为 C ,则下面四个命题中正确的是()

A. 若 C 为椭圆,则 $1 < t < 3$

B. 若 C 为双曲线,则 $t > 3$ 或 $t < 1$

C. 曲线 C 可能是圆

D. 若 C 为椭圆,且长轴在 y 轴上,则 $1 < t < 2$

10. 已知 A, B 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上两点.焦点为 F ,抛物线上存在一点 $M(3, t)$ 到准线的距离为 4,则下列说法正确的是()

A. $p = 2$

B. 若 $OA \perp OB$,则直线 AB 恒过定点 $(4, 0)$

C. 若 $\triangle AOF$ 外接圆与抛物线 C 的准线相切,则该圆半径为 $\frac{3}{2}$

D. 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$,则直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$

11.古希腊著名数学家阿波罗尼斯发现“若 A, B 为平面上相异的两点,则所有满足: $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda (\lambda > 0$,

且 $\lambda \neq 1)$ 的点 P 的轨迹是圆”,后来人们称这个圆为阿波罗尼斯圆.在平面直角坐标系 xOy 中,

$A(-2, 0), B(4, 0)$,若 $\lambda = \frac{1}{2}$,则下列关于动点 P 的结论正确的是()

A. 点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 + 8x = 0$

B. $\triangle APB$ 面积的最大值为 6

C. 在 x 轴上必存在异于 A, B 的两定点 M, N ,使得 $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{1}{2}$

D. 若点 $Q(-3, 1)$,则 $2|PA| + |PQ|$ 的最小值为 $5\sqrt{2}$

三、填空题(本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ,第一象限的 A, B 两点在 C 上,若 $FA \perp AB$,
 $|FA| = 5, |FB| = 13$,则直线 AB 的斜率为_____.

13. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,若存在以点 $T(t, 0)$ 为圆心, $r (r > 0)$ 为半径的 $\odot T$,该圆与椭圆 E 恰有两个公共点,且圆上其余各点均在椭圆内部,则 t 的取值范围是_____.

14. 有公共焦点 F_1, F_2 的椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 点 A 为两曲线的一个公共点, 且满足 $\angle F_1 A F_2 = 90^\circ$, 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}$ 的值为_____.

四、解答题(本大题共 5 小题, 共 77 分)

15. (13 分) 已知 P 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上位于第一象限的点, F 为 C 的焦点, PF 与 C 交于点 Q (异于点 P). 直线 l 与 C 相切于点 P , 与 x 轴交于点 M . 过点 P 作 l 的垂线交 C 于另一点 N .
- (1) 证明: 线段 MP 的中点在定直线上;
- (2) 若点 P 的坐标为 $(2, 2\sqrt{2})$, 试判断 M, Q, N 三点是否共线.

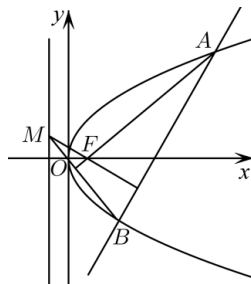
16. (15 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $P(6, y_0)$, F 为抛物线的焦点, 且 $|PF| = 10$.
- (1) 求 y_0 的值;
- (2) 点 Q 为抛物线 C 上一动点, 点 M 为线段 FQ 的中点, 试求点 M 的轨迹方程.

17. (15 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 且经过点 $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 动直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切, 与 C 交于 M, N 两点, 求 O 到线段 MN 的中垂线的最大距离.

18. (17 分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 M 是抛物线的准线 $x = -2$ 上的动点.

(1) 求 p 的值和抛物线的焦点坐标;

(2) 设直线 l 与抛物线相交于 A 、 B 两点, 且 $MF \perp AB$, $AF \perp MB$, 求直线 l 在 x 轴上截距 b 的取值范围.



19. (17 分) 已知 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$ 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, A 为双曲线在第一象限的点, $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴交于点 $P(1, 0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上任意一点 Q 处的切线 l , 若 l 与双曲线 C 左、右两支分别交于点 M 、 N , 问: $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 是否为定值? 若是, 求出此定值; 若不是, 说明理由.

一、单项选择题

1. 【答案】D

因为 $A(-2, 0), B(4, a)$ 两点到直线 $l: 3x - 4y + 1 = 0$ 的距离相等,

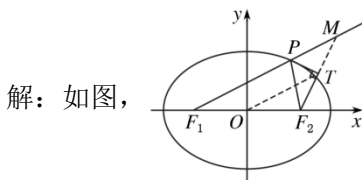
所以有 $\frac{|3 \times (-2) + 0 \times (-4) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 \times 4 - 4a + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \Rightarrow |13 - 4a| = 5 \Rightarrow a = 2$, 或 $a = \frac{9}{2}$, 故选: D

2. 【答案】C

【解答】因为 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$, 所以求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值只要求 $|\overrightarrow{PO}|$ 的最小值即可, 而 $|\overrightarrow{PO}|$ 的最小值即为圆心 O 到直线 $x - 2y + 10 = 0$ 的最小值,

3. 【答案】C 抛物线 $y^2 = -12x$ 的焦点是 $(-3, 0)$, 双曲线 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{4} = 1$ 中, $c^2 = a + 4$, 由题意可知 $a + 4 = 9$, 解得: $a = 5$. 故选: C

4. 【答案】B



延长 F_2T 交 F_1P 延长线于点 M , $\because PT$ 是 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线, $\therefore \angle F_2PT = \angle MPT$.

$\because F_2M \perp PQ$, 且 $PT = PT$, $\therefore \triangle PF_2T \cong \triangle PMT$, $\therefore |PF_2| = |PM|$, $|F_2T| = |MT|$,
 $\therefore |F_1M| = |F_1P| + |PM| = |F_1P| + |PF_2| = 4$, $\therefore |F_2T| = |MT|$, $\therefore T$ 是 F_2M 的中点.

又 O 是 F_1F_2 的中点. $\therefore |F_1M| = |F_1P| + |PM| = |F_1P| + |PF_2| = 4$,

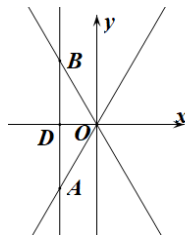
$\therefore |F_2T| = |MT|$, $\therefore T$ 是 F_2M 的中点. 又 O 是 F_1F_2 的中点, $\therefore |OT| = \frac{1}{2} |F_1M| = 2$

5. 【答案】B

【详解】如图, 记抛物线的准线与 x 轴交于点 D , 由题知, $\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$, 解得

$\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ 所以 $\angle AOD = \frac{\pi}{3}$, 因为 $OD = \frac{p}{2}$, 所以 $BD = OD \cdot \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}p}{2}$, 所以

$S_{\triangle AOB} = \frac{p}{2} \times \frac{\sqrt{3}p}{2} = \sqrt{3}$, 解得 $p = 2$ 故选: B



6. 【答案】D

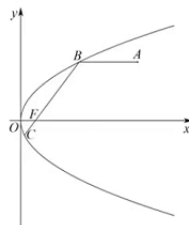
【解答】解: 由题知抛物线焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$, $AB \parallel x$ 轴,

将 $y = 2p$ 代入 $y^2 = 2px$ 得 $x = 2p$, 则 B 为 $(2p, 2p)$,

由题可知 B, F, C 三点共线, BC 方程为: $y = \frac{2p}{2p - \frac{p}{2}}(x - \frac{p}{2})$, 即 $y = \frac{4}{3}(x - \frac{p}{2})$,

$\begin{cases} y = \frac{4}{3}(x - \frac{p}{2}) \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 整理得 $2y^2 - 3py - 2p^2 = 0$, 解得 $y = -\frac{p}{2}$ 或 $y = 2p$, 则点

$C(\frac{p}{8}, -\frac{p}{2})$, 从而 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2} \times (8 - 2p) \times (2p + \frac{p}{2}) = 10$, 解得 $p = 2$. 故选: D.



7. 【答案】C

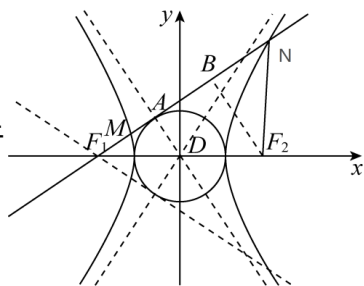
解：由题意，点N在双曲线右支.记切点为点A，连接AD，则 $AD \perp MN$ ， $|AD| = a$ ，

又 $|DF_1| = c$ ，则 $|AF_1| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$.过点 F_2 作 $F_2B \perp MN$ 交直线MN于点B，连接 F_2N ，

则 $F_2B \parallel DA$ ，又点D为 F_1F_2 中点，则 $|F_2B| = 2|DA| = 2a$ ， $|F_1B| = 2|AF_1| = 2b$ 。

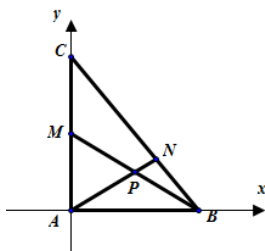
由 $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$ ，得 $\sin \angle F_1NF_2 = \frac{4}{5}$ ， $\tan \angle F_1NF_2 = \frac{4}{3}$ ，所以 $|F_2N| = \frac{|F_2B|}{\sin \angle F_1NF_2} = \frac{5a}{2}$ ， $|BN| = \frac{|F_2B|}{\tan \angle F_1NF_2} = \frac{3a}{2}$ 。故 $|F_1N| = |F_1B| + |BN| = 2b + \frac{3a}{2}$ ，由双曲线定义， $|F_1N| - |F_2N| = 2a$ ，

则 $2b - a = 2a$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ ，所以 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ 。



8. 【答案】A

【解答】解：不妨设 $AB = m$ ， $AC = n$ ，且 $AB \perp AC$ ，以点A为坐标原点，AB，AC所在直线分别为x轴，y轴建立平面直角坐标系，如下图，



则 $A(0,0)$ ， $B(m,0)$ ， $C(0,n)$ ， $M(0, \frac{n}{2})$ ， $N(\frac{2m}{3}, \frac{n}{3})$ ，

直线AN的方程为 $y = \frac{\frac{n}{3}}{\frac{2m}{3}}x = \frac{n}{2m}x$ ，直线BM的方程为 $y = \frac{\frac{n}{2}}{-m}(x - m) = -\frac{n}{2m}(x - m)$ ，联立直

线AN的方程与直线BM的方程可得 $\begin{cases} x = \frac{m}{2} \\ y = \frac{n}{4} \end{cases}$ ，即 $P(\frac{m}{2}, \frac{n}{4})$ ， $\therefore \overrightarrow{PN} = (\frac{m}{6}, \frac{n}{12})$ ， $\overrightarrow{BP} = (-\frac{m}{2}, \frac{n}{4})$ ，

又 $\overrightarrow{AB} = (m,0)$ ， $\overrightarrow{BC} = (-m,n)$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 24\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PN}$ ， $\therefore -m^2 = 24(-\frac{m^2}{12} + \frac{n^2}{48})$ ，化简得 $n = \sqrt{2}m$ ， $\therefore \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{m}{\sqrt{2m^2+m^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。故选：A。

二、多项选择题

9. 【答案】BC

若C为椭圆，则 $\begin{cases} 3-t > 0 \\ t-1 > 0 \\ 3-t \neq t-1 \end{cases}$ ， $\therefore 1 < t < 3$ 且 $t \neq 2$ ，故A错误

若C为双曲线，则 $(3-t)(t-1) < 0$ ， $\therefore t > 3$ 或 $t < 1$ ，故B正确

若C为圆，则 $3-t = t-1$ ， $\therefore t = 2$ ，故C正确

若C为椭圆，且长轴在y轴上，则 $\begin{cases} 3-t > 0 \\ t-1 > 0 \\ t-1 > 3-t \end{cases}$ ， $\therefore 2 < t < 3$ ，故D错误

10. 【答案】ABC

【解答】解：根据抛物线定义可知 $3 + \frac{p}{2} = 4$ ，得 $p = 2$ ，故 A 正确；

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，因为直线 AB 斜率必不为 0，设直线 AB: $x = ky + b$ ，

代入 $y^2 = 4x$ ，得 $y^2 - 4ky - 4b = 0$ ，则 $y_1 + y_2 = 4k$, $y_1 y_2 = -4b$ ，

所以 $k_{OA} k_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{y_1 y_2}{\frac{1}{16} y_1^2 y_2^2} = \frac{16}{y_1 y_2} = \frac{16}{-4b} = -1$ ，即 $b = 4$ ，所以直线 AB 恒过定点 (4, 0)，故 B 正

确； $\triangle AOF$ 外接圆圆心横坐标为 $\frac{1}{2}$ ，外接圆半径为 $\frac{1}{2} + \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$ ，故 C 正确；

设直线 AB 的方程为: $x = my + 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，

联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，消去 x 整理可得: $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，所以 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4$ ，

因为 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ ，即 $y_1 = -3y_2$ ，

又 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4$ ，解得 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以直线 AB 的斜率为 $k_{AB} = \frac{1}{m} = \pm \sqrt{3}$ ，故 D 错误。故选 ABC。

11. 【答案】ACD

【解答】解：对于选项 A，设 $P(x, y)$ ，因为点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}$ ，

化简得 $x^2 + 8x + y^2 = 0$ ，故 A 正确；

对于选项 B，由选项 A 可知，点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 + 8x = 0$ ，

即 $(x+4)^2 + y^2 = 16$ ，所以点 P 的轨迹是以 $(-4, 0)$ 为圆心，4 为半径的圆，

又 $|AB| = 6$ ，且点 A, B 在直径上，故当点 P 到圆的直径距离最大的时候， $\triangle PAB$ 的面积最大，因为圆上的点到直径的最大距离为半径，即 $\triangle PAB$ 的高的最大值为 4，所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ ，故 B 错误；

对于选项 C，假设在 x 轴上存在异于 A, B 的两定点 M, N，使得 $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{1}{2}$ ，

设 $M(m, 0)$, $N(n, 0)$ ，故 $\frac{\sqrt{(x-m)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-n)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}$ ，即 $\sqrt{(x-n)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-m)^2 + y^2}$ ，

化简可得 $x^2 + y^2 = \frac{8m-2n}{3}x + \frac{4m^2-n^2}{3} = 0$ 。

又点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 + 8x = 0$ ，可得 $\begin{cases} -\frac{8m-2n}{3} = 8 \\ \frac{4m^2-n^2}{3} = 0 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} m = -6 \\ n = -12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = -2 \\ n = 4 \end{cases}$ (舍去)，

故存在异于 A, B 的两定点 $M(-6, 0)$, $N(-12, 0)$ ，使得 $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{1}{2}$ ，故 C 正确；

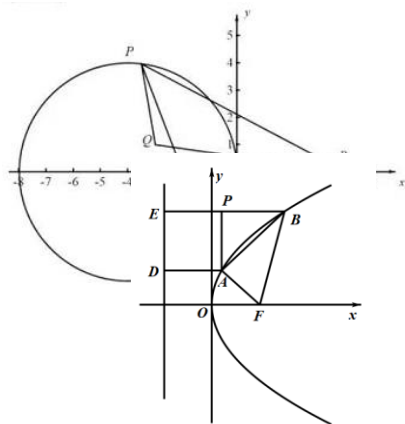
对于选项 D，因为 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ ，所以 $2|PA| = |PB|$ ，所以 $2|PA| + |PQ| = |PB| + |PQ|$ ，

又点 P 在圆 $x^2 + 8x + y^2 = 0$ 上，如图所示，

所以当 P, Q, B 三点共线时 $2|PA| + |PQ|$ 取最小值，此时 $(2|PA| + |PQ|)_{\min} = |BQ| = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + (0 - 1)^2} = 5\sqrt{2}$ ，故 D 正确。

故选：ACD。

三、填空题



12. 【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【详解】如图所示，设C的准线为l，分别过A，B作l的垂线，垂足分别为D，E，过A作AP⊥BE于点P.

由抛物线的定义可知|AD|=|FA|=5，|BE|=|FB|=13，所以|BP|=13-5=8. 又因为FA⊥AB，|AB|=√(13²-5²)=12，所以|AP|=√(12²-8²)=4√5，所以直线AB的斜率

$$k_{AB} = \tan \angle ABP = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ 故答案为: } \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

13. 【答案】 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

【解答】解：由题意可知，圆的方程为 $(x-t)^2 + y^2 = r^2$,

与椭圆方程联立消去y可得， $x^2 - 8tx + 4t^2 - 4r^2 + 12 = 0$, ①

∵圆与椭圆恰有两个公共点，∴ $\Delta = (-8t)^2 - 4(4t^2 - 4r^2 + 12) = 0$,

整理得： $t^2 = -\frac{1}{3}r^2 + 1$ ，已知 $r > 0$ ，则 $t^2 < 1$ ，可得 $-1 < t < 1$;

由方程①结合韦达定理可知切点坐标为横坐标4t，则 $-2 < 4t < 2$ ，得 $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.

综上，可得t的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 故答案为： $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

14. 【答案】 2

【解析】解：可设A为第一象限的点，|AF₁| = m，|AF₂| = n，

设椭圆长轴为2a₁，双曲线实轴长为2a₂，由椭圆的定义可得m + n = 2a₁，

由双曲线的定义可得m - n = 2a₂，可得m = a₁ + a₂，n = a₁ - a₂，由∠F₁AF₂ = 90°，可得

m² + n² = (2c)²，即为(a₁ + a₂)² + (a₁ - a₂)² = 4c²，化为a₁² + a₂² = 2c²，则 $\frac{a_1^2}{c^2} + \frac{a_2^2}{c^2} = 2$ ，

即有 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 2$

四、解答题

15. (1)证明 设P(x₀, y₀)，则y₀² = 4x₀，因为点P在第一象限，所以y₀ = 2√x₀，

对y = 2√x两边求导得y' = $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ，所以直线l的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}$ ，所以直线l的方程为y - 2√x₀ =

$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$ ，令y = 0，则x = -x₀，所以M(-x₀, 0)，所以线段MP的中点为 $(0, \frac{y_0}{2})$ ，

所以线段MP的中点在定直线x = 0上.

(2)解 若P(2, 2√2)，则M(-2, 0). 所以k_{MP} = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，k_{PF} = 2√2，因为PN⊥l，

所以 $k_{PN} = -\sqrt{2}$, 所以直线 $PF: y = 2\sqrt{2}(x-1)$, 直线 $PN: y = -\sqrt{2}(x-4)$.

$$\text{由} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = 2\sqrt{2}(x-1), \end{cases} \quad \text{得 } 2x^2 - 5x + 2 = 0, \text{ 所以 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } 2, \text{ 所以 } Q\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right),$$

$$\text{由} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = -\sqrt{2}(x-4), \end{cases} \quad \text{得 } x^2 - 10x + 16 = 0, \text{ 所以 } x = 2 \text{ 或 } 8, \text{ 所以 } N(8, -4\sqrt{2}).$$

$$\text{因为 } M(-2, 0), Q\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right), N(8, -4\sqrt{2}), \text{ 所以 } k_{MQ} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}, k_{MN} = -\frac{2\sqrt{2}}{5},$$

所以 M, Q, N 三点共线.

16. (1) 由抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $P(6, y_0)$ 可得: $y_0^2 = 12p$,

又 $|PF| = 10$, 可得 $6 + \frac{p}{2} = 10$, 解得 $p = 8$, $y_0 = \pm 4\sqrt{6}$;

(2) 由 (1) 知 $C: y^2 = 16x$, 则 $F(4, 0)$, 设 $Q(x_1, y_1)$, $M(x, y)$,

根据点 M 为线段 FQ 的中点, 可得:

$$\begin{cases} x_1 + 4 = 2x \\ y_1 = 2y \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = 2x - 4 \\ y_1 = 2y \end{cases},$$

由点 Q 为抛物线 C 上, 所以 $(2y)^2 = 16(2x - 4)$, 整理可得点 M 的轨迹方程为 $y^2 = 8x - 16$.

17. 【解析】(1)

$$\text{由题知: } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{6}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 2\sqrt{2} \end{cases}. \text{ 所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

(2) 当 l 的斜率不存在时, 线段 MN 的中垂线为 x 轴, 此时 O 到中垂线的距离为 0.

当 l 的斜率存在时, 设 $l: y = kx + m (k \neq 0)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

因为 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 O 到 l 的距离为 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 所以 $m^2 = k^2 + 1$.

$$\text{联立方程 } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{ 得 } (1+9k^2)x^2 + 18kmx + 9m^2 - 9 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{18km}{1+9k^2}, \text{ 可得 } MN \text{ 的中点为 } \left(-\frac{9km}{1+9k^2}, \frac{m}{1+9k^2}\right).$$

则 MN 的中垂线方程为 $y = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{9km}{1+9k^2}\right) + \frac{m}{1+9k^2}$, 即 $x + ky + \frac{8km}{1+9k^2} = 0$.

因此 O 到中垂线的距离为 $d = \frac{\left|\frac{8km}{1+9k^2}\right|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|8k|}{1+9k^2} = \frac{8}{9|k| + \frac{1}{|k|}} \leq \frac{4}{3}$

(当且仅当 $|k| = \frac{1}{3}$, $|m| = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 时等号成立).

综上所述, O 到线段 MN 的中垂线的最大距离为 $\frac{4}{3}$.

18. 【解析】(1) 因为抛物线的准线是 $x = -2$, 所以抛物线的焦点坐标 $F(2, 0)$, $\frac{p}{2} = 2$, 所以 $p = 4$;

(2) 因为点 M 是抛物线的准线 $x = -2$ 上的动点, 设 $M(-2, y_0)$.

(i) 若直线 l 的斜率不存在, 则 $l: x = b (b > 0)$.

由 $\begin{cases} x = b \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 得 $A(b, \sqrt{8b}), B(b, -\sqrt{8b})$,

$\overrightarrow{MF} = (4, -y_0), \overrightarrow{AB} = (0, -2\sqrt{8b}), \overrightarrow{AF} = (2-b, -\sqrt{8b}), \overrightarrow{MB} = (b+2, -\sqrt{8b}-y_0)$

因为 $MF \perp AB$, 所以 $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 即 $(4, -y_0) \cdot (0, -2\sqrt{8b}) = 0$, 所以 $2y_0\sqrt{8b} = 0$,

因为 $b \neq 0$, 所以 $y_0 = 0$; 因为 $AF \perp MB$, 所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$,

即 $(2-b, -\sqrt{8b}) \cdot (b+2, -\sqrt{8b}-y_0) = 0$, 所以 $(2-b)(b+2) + 8b = 0$,

所以 $b^2 - 8b - 4 = 0$ 因为 $b > 0$, 所以 $b = 4 + 2\sqrt{5}$ ①.

(ii) 若直线 l 的斜率存在, 设为 k, 则 $l: y = k(x-b)$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = k(x-b) \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 得 $ky^2 - 8y - 8kb = 0$, 所以 $y_1 + y_2 = \frac{8}{k}, y_1 y_2 = -8b, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{8}, \frac{y_2^2}{8} = \frac{(-8b)^2}{64} = b^2$,

且 $\Delta = 64 - 4k(-8kb) > 0$, 所以 $bk^2 + 2 > 0$ (*),

因为 $MF \perp AB$, 所以 $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 即 $(4, -y_0) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$, 所以

$4(x_2 - x_1) - y_0(y_2 - y_1) = 0$, 所以 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{y_0}$, 得 $y_0 = \frac{4}{k}$,

因为 $AF \perp MB$, 所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$,

即 $(2 - x_1, -y_1) \cdot (x_2 + 2, y_2 - y_0) = 0$, 所以 $(2 - x_1)(x_2 + 2) - y_1 y_2 + y_1 y_0 = 0$,

所以 $2x_2 + 4 - x_1 x_2 - 2x_1 - y_1 y_2 + y_1 \frac{4}{k} = 0$, 则 $2\left(\frac{y_2}{k} + b\right) + 4 - b^2 - 2\left(\frac{y_1}{k} + b\right) + 8b + y_1 \frac{4}{k} = 0$

所以 $2(y_1 + y_2) + 4k - kb^2 + 8bk = 0$, 得 $2 \cdot \frac{8}{k} + 4k - kb^2 + 8bk = 0$, 所以 $k^2 = \frac{16}{b^2 - 8b - 4} > 0$ ②,

代入 (*) 得, $\frac{16b}{b^2 - 8b - 4} + 2 > 0$, 所以 $\frac{b^2 - 4}{b^2 - 8b - 4} > 0$ ③,

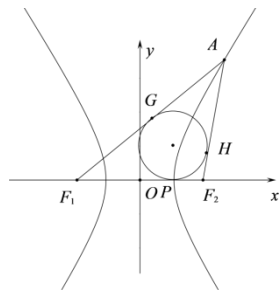
由②得 $b^2 - 8b - 4 > 0$, 所以 $b \in (-\infty, 4 - 2\sqrt{5}) \cup (4 + 2\sqrt{5}, +\infty)$ ④,

所以 $b^2 - 4 > 0$, 所以 $b \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, ⑤

由④, ⑤知 $b \in (-\infty, -2) \cup (4 + 2\sqrt{5}, +\infty)$,

综合 (i) (ii) 知直线 l 在 x 轴上截距 b 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup [4 + 2\sqrt{5}, +\infty)$.

19. 【解析】(1)如图, 设 AF_1 , AF_2 与 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆分别交于 G , H 两点, 则 $2a = |AF_1| - |AF_2| = |F_1P| - |PF_2| = (1 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1) = 2$,
所以 $a = 1$, 则 $b^2 = c^2 - a^2 = 2$, 则双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.



(2)由题意得, 切线 l 的斜率存在.

设切线 l 的方程为 $y = kx + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

因为 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 相切, 所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{2}$, 即 $m^2 = 2k^2 + 2$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 并整理得 } (2 - k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 2 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{2km}{2 - k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{-m^2 - 2}{2 - k^2}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} &= (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{ON}) \\ &= |\overrightarrow{QO}|^2 - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= |\overrightarrow{QO}|^2 - |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos \angle QON - |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cos \angle QOM + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= |\overrightarrow{QO}|^2 - |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| - |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{QO}|^2 - |\overrightarrow{OQ}|^2 - |\overrightarrow{OQ}|^2 + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} - |\overrightarrow{OQ}|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} &= x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) \\ &= (k^2 + 1)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{(k^2 + 1)(-m^2 - 2)}{2 - k^2} + \frac{2k^2m^2}{2 - k^2} + m^2 = \frac{m^2 - 2k^2 - 2}{2 - k^2}, \end{aligned}$$

将 $m^2 = 2k^2 + 2$ 代入上式得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$.

综上所述, $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 为定值, 且 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = -2$.

