椭圆的方程与性质

椭圆的方程与性质

一、课标要求

1．了解椭圆的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

2．经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.

3．理解数形结合思想.

4．了解椭圆的简单应用.

椭圆的方程与性质

二、知识梳理

1．椭圆的定义

（1）平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于<u>常数</u>(大于 F_1F_2)的点的轨迹叫做椭圆．这两个定点叫做椭圆的<u>焦点</u>，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距．

（2）集合 $P=\{M|MF_1|+MF_2=2a\}$，$F_1F_2=2c$，其中 a，c 为常数且 $a>0$，$c>0$．

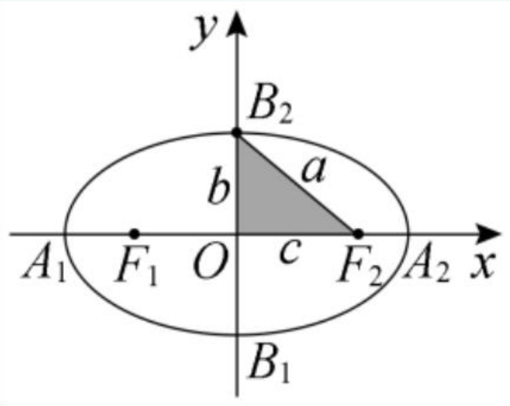
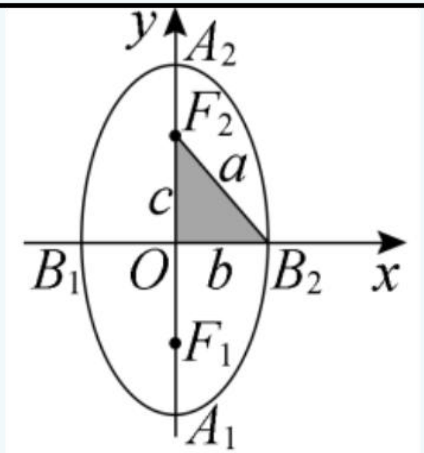
①当 $2a>F_1F_2$ 时，点 M 的轨迹为椭圆；

②当 $2a=F_1F_2$ 时，点 M 的轨迹为线段 F_1F_2；

③当 $2a<F_1F_2$ 时，点 M 的轨迹不存在．

椭圆的方程与性质

2．椭圆的标准方程和几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td>范围</td><td>$-a\le x\le a,-b\le y\le b$</td><td>$-b\le x\le b,-a\le y\le a$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">对称轴：<u>坐标轴</u>；对称中心：<u>原点</u></td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a,0),A_2(a,0)$,
$B_1(0,-b),B_2(0,b)$</td><td>$A_1(0,-a),A_2(0,a)$,
$B_1(-b,0),B_2(b,0)$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\underline{\frac{c}{a}}$，且 $e\in(0，1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">a，b，c 的关系</td><td colspan="2">$c^2=a^2-b^2$</td></tr>
</table>

椭圆的方程与性质

【拓展知识】

1．点 $P(x_0, y_0)$和椭圆的位置关系

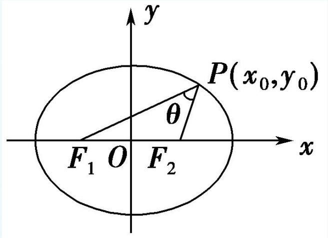
（1）点 $P(x_0, y_0)$在椭圆内$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$

（2）点 $P(x_0, y_0)$在椭圆上$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

（3）点 $P(x_0, y_0)$在椭圆外$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$

2．焦点三角形

如图，椭圆上的点 $P(x_0, y_0)$与两焦点构成的$\triangle PF_1F_2$叫做焦点三角形．设 $r_1=PF_1$，$r_2=PF_2$，$\angle F_1PF_2=\theta$，$\triangle PF_1F_2$的面积为 S，则在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中：



（1）当 $r_1=r_2$，即 点 P 的位置为短轴端点时，θ最大；

（2）$S=b^2\tan\frac{\theta}{2}=c|y_0|$，当$|y_0|=b$，即点 P 的位置为短轴端点时，S 取最大值，最大值为 bc．

椭圆的方程与性质

（3）$\underline{\quad a-c \quad}\leqslant PF_1\leqslant\underline{\quad a+c \quad}$.

（4）$PF_1=\underline{\quad a+ex_0 \quad}$，$PF_2=\underline{\quad a-ex_0 \quad}$.

（5）当 $PF_2\perp x$ 轴时，点 P 的坐标为$(c,\ \pm\dfrac{b^2}{a})$.

3．已知过焦点 F_1 的弦 AB，则$\triangle ABF_2$ 的周长为 $\underline{\quad 4a \quad}$.

4．椭圆中点弦的斜率公式

若 $M(x_0,\ y_0)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的弦 AB(AB 不平行 y 轴)的中点，

则有 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，特别地，若椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$，则有 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\dfrac{a^2}{b^2}$.

5．弦长公式：直线与圆锥曲线相交所得的弦长

$AB=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(1+\dfrac{1}{k^2})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$(其中 k 为直线的斜率).

椭圆的方程与性质

三、基础回顾

1．判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

（1）平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数的点的轨迹是椭圆．（ × ）

（2）椭圆上一点 P 与两焦点 F_1，F_2 构成△PF_1F_2 的周长为 $2a+2c$(其中 a 为椭圆的长半轴长，c 为椭圆的半焦距)．（ √ ）

（3）椭圆的离心率 e 越大，椭圆就越圆．（ × ）

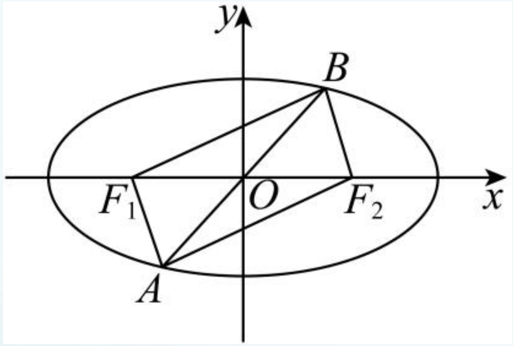
（4）关于 x，y 的方程 $mx^2+ny^2=1(m>0，n>0，m\neq n)$表示的曲线是椭圆．（ √ ）

（5）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距相同．（ √ ）

椭圆的方程与性质

2．已知A，B 是椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$上关于坐标原点对称的两点，$F_1$，$F_2$ 分别是椭圆C 的左、右焦点，若 $AF_1=2$，则 $BF_1=$（ C ）

A．1　　B．2　　C．4　　D．5



椭圆的方程与性质

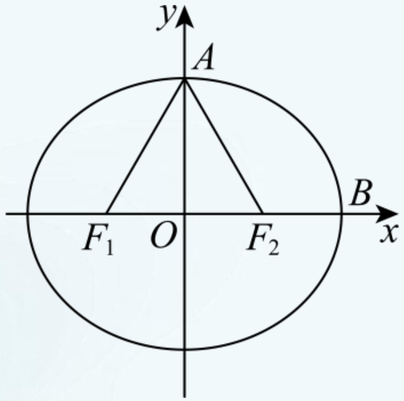
3．若椭圆的中心为坐标原点，对称轴为坐标轴，短轴的一个端点与两焦点构成个正三角形，焦点到椭圆上点的最短距离为$\sqrt{3}$，则这个椭圆的方程为（ B ）

A．$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$

B．$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$或$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{12}=1$

C．$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{12}=1$

D．以上都不对

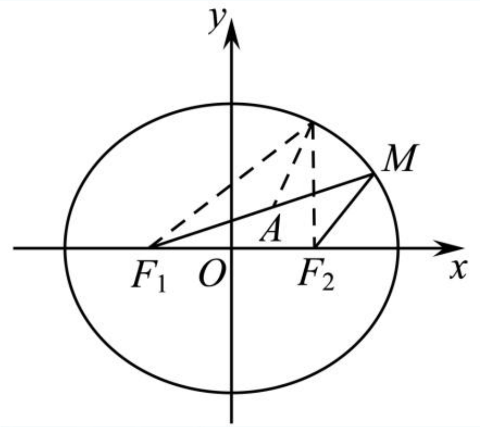


椭圆的方程与性质

4．F_1、F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，M 为椭圆上的动点，设点 $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则 $MA+MF_2$ 的最小值为（　A　）

A．$4-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　B．$2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

C．$4+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　D．$2+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$



椭圆的方程与性质

5．（多选题）某同学在研究教材中一例问题“设点 A、B 的坐标分别为$(-5，0)$、$(5，0)$，直线 AM、BM 相交于 M，且它们的斜率之积为$-\frac{4}{9}$．求点 M 的轨迹方程”时，将其中的已知条件“斜率之积为$-\frac{4}{9}$”拓展为“斜率之积为常数 k（$k\neq 0$）”之后，得出如下结论，其中正确的是（ABC）

A．当 $k>0$ 时，点 M 的轨迹为焦点在 x 轴的双曲线（不含与 x 轴的交点）

B．当 $-1<k<0$ 时，点 M 的轨迹为焦点在 x 轴的椭圆（不含与 x 轴的交点）

C．当 $k<-1$ 时，点 M 的轨迹为焦点在 y 轴的椭圆（不含与 x 轴的交点）

D．当 $k<0$ 时，点 M 的轨迹为椭圆（不含与 x 轴的交点）

椭圆的方程与性质

四、考点扫描

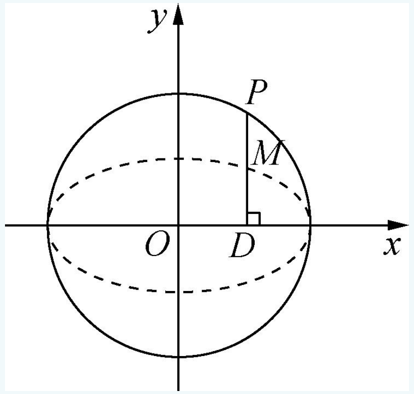
考点一 椭圆的定义及应用

例 1（1）已知一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切，同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为(A)

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{27}=1$　　C. $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{27}=1$　　D. $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{27}=1$

椭圆的方程与性质

（2）如图，在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段 PD，垂足为 D．当点 P 在圆上运动时，线段 PD 的中点 M 的轨迹是椭圆，那么这个椭圆的离心率是(　D　)



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

椭圆的方程与性质

（3）方程$x^2+ky^2=2$表示焦点在x轴上的椭圆的一个充分不必要条件是（ B ）

A．$k>0$　　B．$1<k<2$　　C．$k>1$　　D．$0<k<1$

椭圆的方程与性质

【对点训练】

（1）（2023·湖南联考期中）已知方程$\dfrac{x^2}{k-1}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$表示椭圆，则实数$k$的取值范围是（ C ）

A．$(1,9)$　　B．$(-\infty,9)$　　C．$(1,5)\cup(5,9)$　　D．$(1,+\infty)$

椭圆的方程与性质

（2）（多选题）已知P是椭圆$C:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$上的一点，$F_1,F_2$是椭圆$C$的两个焦点，则下列结论正确的有（AC）

A．椭圆C的短轴长为$2\sqrt{3}$

B．F_1,F_2的坐标为$(-1,0),(1,0)$

C．椭圆C的离心率为$\frac{1}{2}$

D．存在点P，使得$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$

椭圆的方程与性质

考点二 求椭圆的标准方程

例 2　求适合下列条件的椭圆的标准方程.

（1）焦点坐标分别为$(-2，0)$，$(2，0)$，且经过点$\left(\frac{5}{2}，-\frac{3}{2}\right)$；

（2）焦点在坐标轴上，且经过$A(\sqrt{3}，-2)$和$B(-2\sqrt{3}，1)$两点；

（3）已知$AB=2$，A，B分别在y轴和x轴上运动，O为坐标原点，满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$的动点$P$的轨迹方程.

椭圆的方程与性质

规律方法：

利用待定系数法要先定形(焦点位置)，再定量，即首先确定焦点所在位置，然后根据条件建立关于 a，b 的方程组．如果焦点位置不确定，可设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0$，$n>0$，$m\neq n)$的形式．

椭圆的方程与性质

【对点训练】一椭圆的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，若长轴长为 18，且两个焦点恰好将长轴三等分，则此椭圆的方程是（A）

A. $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{72}=1$

B. $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{9}=1$

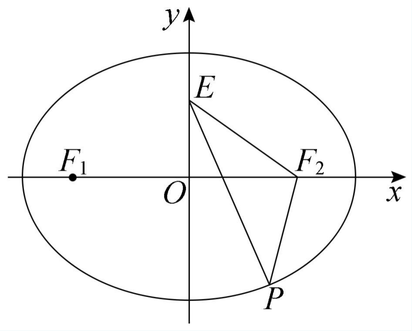
C. $\dfrac{x^2}{72}+\dfrac{y^2}{81}=1$

D. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{72}=1$

椭圆的方程与性质

考点三　椭圆的几何性质

例 3　（1）如图，设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点 $E(0，t)(0<t<b)$．已知动点 P 在椭圆上，且 P，E，F_2 三点不共线，若$\triangle PEF_2$的周长的最小值为 $3b$，则椭圆 C 的离心率为(　　D　　)



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

椭圆的方程与性质

（2）（2023·全国卷）设 O 为坐标原点，F_1,F_2 为椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$的两个焦点，点 P 在 C 上，且$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，则 OP=（ B ）

A. $\dfrac{13}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\dfrac{14}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$

椭圆的方程与性质

规律方法：

求椭圆离心率或其取值范围的方法

（1）求出 a，b 或 a，c 的值，代入 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 直接求.

（2）先根据条件得到关于 a，b，c 的齐次等式(不等式)，结合 $b^2=a^2-c^2$ 转化为关于 a，c 的齐次等式(不等式)，然后将该齐次等式(不等式)两边同时除以 a 或 a^2 转化为关于 e 或 e^2 的方程(不等式)，再解方程(不等式)即可得 e(e 的取值范围).

椭圆的方程与性质

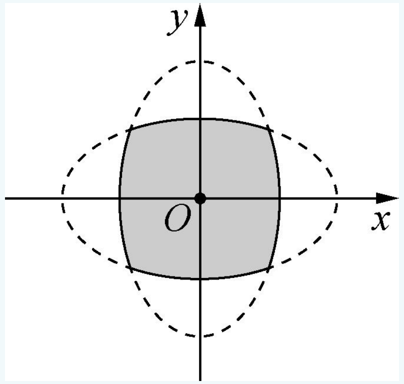
【对点训练】（2023·山东烟台市三模）已知F_1,F_2分别是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$M$是$C$上一点，且$MF_2$与$x$轴垂直，直线$MF_1$与$C$的另一个交点为$N$，若$\overrightarrow{MF_1}=3\overrightarrow{F_1N}$，则$C$的离心率为（ A ）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

椭圆的方程与性质

例 4（1）（多选题）如图，两个椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1$ 内部重叠区域的边界记为曲线 C，P 是曲线 C 上的任意一点，下列结论正确的有(BC)



A．P 到 $F_1(-4，0)$，$F_2(4，0)$，$E_1(0，-4)$，$E_2(0，4)$四点的距离之和为定值

B．曲线 C 关于直线 $y=x$，$y=-x$ 均对称

C．曲线 C 所围区域面积必小于 36

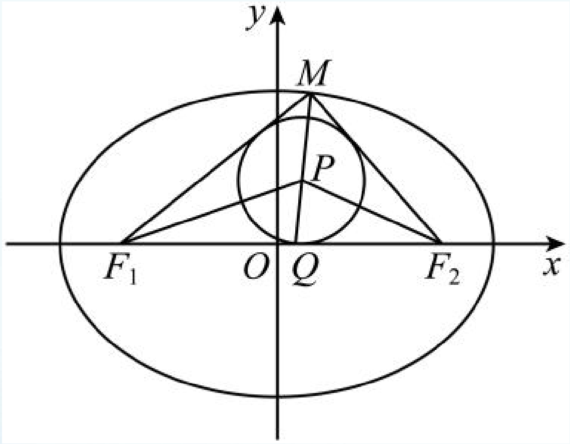
D．曲线 C 总长度不大于 6π

椭圆的方程与性质

（2）已知椭圆 C 的一个焦点为 F（0，1），椭圆 C 上的点到 F 的距离的最小值为 1，则椭圆 C 的标准方程为__$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$__；若 P 为椭圆 C 上一动点，点 M（3，3），则 $PM-PF$ 的最小值为____1____.

椭圆的方程与性质

【对点训练】（2023·湖南模拟）若椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，两个焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$，$M$ 为椭圆C 上异于顶点的任意一点，点P 是$\triangle MF_1F_2$ 的内心，连接MP 并延长，交F_1F_2 于点Q，则$\dfrac{PM}{PQ}=$____2____



椭圆的方程与性质

五．素养导向

1．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{m-2}=1$，长轴在 x 轴上，若焦距为 4，则 $m=$（ A ）

A．4　　B．5　　C．7　　D．8

椭圆的方程与性质

2．(多选题) 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{2}=1(a>2)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过点$P(1,1)$的直线与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，且满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$．动点$Q$满足$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，则下列结论正确的有(ABD)

A． $a=3$

B．动点Q的轨迹方程为$2x+3y-6=0$

C．线段OQ(O为坐标原点）长度的最小值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

D．线段OQ(O为坐标原点）长度的最小值为$\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

椭圆的方程与性质

3．（2020·江苏南京市一模）罗默、伯努利家族、莱布尼兹等大数学家都先后研究过星形线 C：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 的性质，其形美观，常用于超轻材料的设计．曲线 C 围成的图形的面积 S____<____2（选填“>”“<”或“=”），曲线 C 上的动点到坐标原点的距离的取值范围是____$[\frac{1}{2}，1]$____．

椭圆的方程与性质

4．已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，一组平行直线的斜率是$\frac{3}{2}$.

（1）这组直线何时与椭圆相交？

（2）当它们与椭圆相交时，证明：这些直线被椭圆截得的线段的中点在一条直线上.

椭圆的方程与性质

探究：过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点 $P(x_0，y_0)$作椭圆的切线 l，求切线 l 的方程.