

# 基于ACT-R理论的 “高中数学探究活动”教学实践与思考 ——以斐波那契数列为例

吴玉章 姚 松 江苏省新沂市第一中学 221400

[摘要] 针对高中数学教材中数学探究活动的教学现状,结合ACT-R理论,以斐波那契数列教学设计为例,引导学生进行学习实践,并对ACT-R理论应用于高中数学探究活动教学实践进行反思。

[关键词] ACT-R理论;数学探究活动;教学实践

## 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(简称新课标)提到高中数学课程要注重促进学生实践能力和创新意识的发展。已有研究表明数学探究教学可以增强学生的创新意识和实践能力,同时对增强学生数学学习自信心起着积极作用。由于不作为考试内容、课时紧张、学习难度大等因素,新课标所规定的数学探究活动没有得到足够重视,大多数教师在组织教学时直接跳过这部分内容,更谈不上对其进行研究并开发新的学习项目,这显然不符合新课改的要求。鉴于此,笔者尝试使用ACT-R理论对高中数学探究活动进行教学设计,收获颇多,在此提出分享。

## ACT-R理论与高中数学探究活动

### 1. ACT-R理论概述

ACT-R理论的一个基本观点是:可以由相对简单的原理形成相对简单的知识单元,再由这些相对简单的知识单元构成复杂的认知<sup>[1]</sup>。它的基本内涵是:任何知识的习得都是始于陈述性阶段,经过一段时间的程序化处理,最终过渡到自动化阶段<sup>[2]</sup>。ACT-R理论将知识分成两类:陈述性知识和程序性知识。陈述性知识,用信息块来表征,可以用“是什么”来回答;程序性知识,通过提取陈述性信息块来达到目标的规则性单元,是回答“如何做”的知识。ACT-R理论由教学设计流程图和各环节设计的思维

导图构成,为教师深度理解数学、深度理解学生和深度教学提供了强有力的技术支撑。

### 2. 数学探究活动

数学探究活动是指以解决具体问题为目的,要求学生观察分析数学事实,提出有意义的数学问题,猜测、探求适当的数学结论和规律,以及解决问题的思路 and 方案,并给出解释或证明<sup>[3]</sup>。

### 3. ACT-R理论与数学探究教学

数学探究活动教学的实施是为了使学生更好地理解数学本质,提升学生的数学思维水平。不仅要合理设置探究问题,创设探究意识的问题情境,还要注重数学探究活动组织形式、探究手段的设计,适时引导学

基金项目:江苏省教育科学“十四五”规划普教重点课题“指向关键能力的高中数学主题单元式教学的实践研究”(B/2021/02/34);江苏省教研室第十一期立项课题“差异教学在课程基地中应用的实践研究”(2015JK11-LO42);新沂市2024年度“十四五”规划课题“指向深度学习的高中数学主题单元式教学的实践研究”(xjkg2024Z16)。

作者简介:吴玉章(1977—),中小学高级教师,主要从事数学教学与考试命题研究工作。

生进行合作. ACT-R理论与数学学习结合在一起,倡导将复杂的数学问题简单化,比建构主义理论和情境认知理论更加注重知识的逻辑性,对学生认识数学学习本质有很大的帮助<sup>[4]</sup>. 不仅如此,还有助于学生更好地理解数学知识,解决学习中存在的困惑,达到一个更好的教学效果.

数学探究活动与ACT-R理论有密切的联系,即基于ACT-R理论,在数学探究活动教学中,将陈述性知识通过熟练操作转化为程序性知识,通过精致练习使程序性知识更加自动化,引导学生用数学思维分析各要素之间的关系,进而提升学生的应用和创新意识<sup>[5]</sup>.

### 基于ACT-R理论的斐波那契数列教学设计

斐波那契数列与黄金分割是人教A版(2019)选择性必修第二册教材第四章“数列”(第10~11页)中“阅读与思考”的内容. 斐波那契数列与等差、等比数列一样,都是从现实背景中抽象概括出来的重要数列模型,而数列又是特殊的函数,基本遵循函数的研究路径:背景—概念—性质—应用. 模型、数形结合、转化与化归、函数与方程、极限等都是探究数学问题时常用的思想方法,充分体现了数学探究活动的研究手段.

#### 1. 学习内容及认知分析

本节课主要的教学内容包括斐波那契数列的概念、递推公式、通项公式、性质、实际应用. 在此之前,学生学习了数列的概念,以及等差数列和等比数列的定义、通项公式、性质、前 $n$ 项和公式和简单应用,这些都为本节课的学习奠定了知识基础. 基于ACT-R理论的本节课结构思维导

图如图1所示.

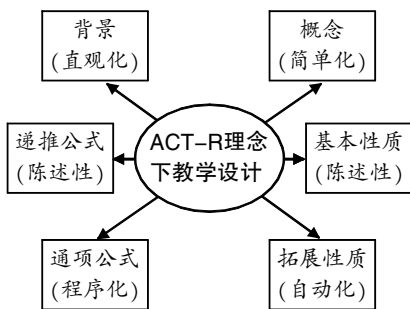


图1 基于ACT-R理论的结构思维导图

#### 2. 学习目标

与等差数列和等比数列相比,斐波那契数列的取值规律及性质比较隐蔽且不易发掘. 另外,学生对数列问题的求解思路和方法的应用不够灵活,其应用意识、创新能力也不够强. 现依据ACT-R理论和实际学情对本节课的学习目标进行层级分解,并将其展示如下(如图2所示):

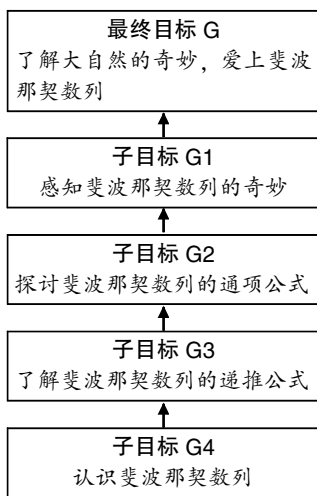


图2 基于ACT-R理论的斐波那契数列学习目标

#### 3. 基于ACT-R理论的斐波那契数列教学设计流程图

如图3所示.

#### 4. 基于ACT-R理论的斐波那契数列教学过程

##### 环节1 溯斐波那契数列之源.

师:在前面几节课中,我们已经学习了等差数列、等比数列的基本知识,也熟悉了研究数列的一般路径,体会到了数列强大的魅力所在,还有

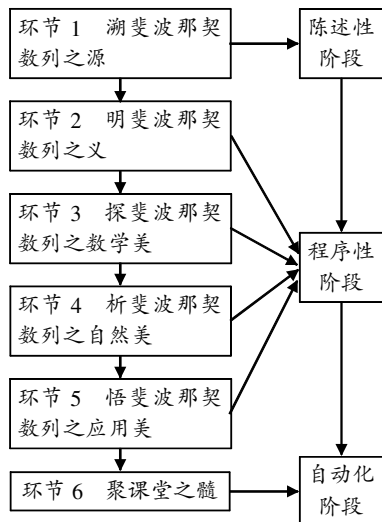


图3 基于ACT-R理论的斐波那契数列教学设计流程图

哪些值得我们研究的数列呢? 让我们先来看一段视频——《达·芬奇密码》。(播放视频)

师:视频中的密码重新排序后,它到底揭示了什么秘密? 时间要回溯到1202年,一位叫列昂纳多·斐波那契的意大利数学家,他出版了一本书,叫《算盘全书》. 该书介绍了一个神秘的数列——斐波那契数列.

**设计意图** 在陈述性阶段获取陈述性知识;利用数学史引入课题,集中学生的注意力,激发学生的求知欲,起到良好的教学效果.

##### 环节2 明斐波那契数列之义.

问题:如果1对兔子每月能生1对小兔子(一雄一雌),而每1对小兔子在它出生后的第3个月里,又能生1对小兔子,假定在不发生死亡的情况下,由1对初生的小兔子开始,1年后会有多少对兔子?

师生活动:教师解读题目要求,带领学生分析并填写到第3个月,学生自主完成后面9个月的填写.

学生活动:尝试用树状图、列表等方法得到第4至12个月的兔子对数.

追问1:你是怎么得到这些月份的兔子对数的?

表1 有趣的兔子问题

时间/月	初生兔子/对	成熟兔子/对	兔子总数/对
1	1	0	1
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
...	...	...	...

追问2:这个规律适合每个月的兔子对数吗?

追问3:假设第 $n$ 个月的兔子对数为 $F_n$ ,你能用数学符号语言表达这个规律吗?

师生总结:按照这个规律,我们能得到更多月份的兔子对数,这些数构成了一个数列.由于这个数列最早是由斐波那契提出的,为了纪念他,人们把这个数列称为斐波那契数列,通常记为 $\{F_n\}$ ,数列中的项称为斐波那契数.斐波那契数列的递推公式为

$$\begin{cases} F_1=F_2=1, \\ F_{n-2}+F_{n-1}=F_n(n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*). \end{cases}$$

**设计意图** 用ACT-R理论把大问题分解为一系列的子问题;通过问题串的设置,引导学生总结出斐波那契数列的递推性质,抽象出斐波那契数列模型.

**环节3 探斐波那契数列之数学美.**

师:除了前面总结出来的递推公式,斐波那契数列还有哪些性质呢?(提供通项公式的一个雏形)

活动1:类比等差、等比数列的研究内容及研究方法,对斐波那契数列展开探究.

预设1:学生探究斐波那契数列的通项公式;

预设2:学生探究斐波那契数列相邻两项的比值.

师生活动:教师组织学生合作探究,小组代表汇报探究成果.

①当斐波那契数列的项数越来越大时,相邻两项的比值越来越接近黄金比

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\right);$$

②斐波那契数列的通项公式为 $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \times$

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

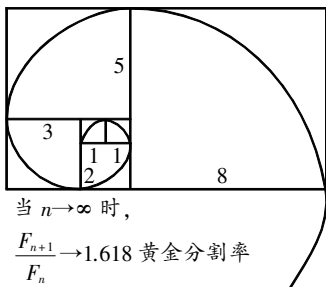
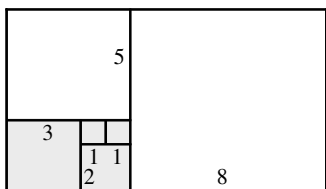
**设计意图** 用ACT-R理论将复杂问题简单化,促使学生关注数学本质.等差、等比数列的学习经验是本节课探究活动的生长点,在斐波那契数列的探究过程中,学生从已有的陈述性知识出发.

**环节4 析斐波那契数列之自然美.**

师:其实斐波那契数列不仅仅有数学美,它还有自然美、被称为大自然的密码.现在我们一起感受斐波那契数列的自然美.

活动2:动手操作,深化探究.

用所给的正方形纸片拼成矩形(从最小的两个正方形开始,每次添



当 $n \rightarrow \infty$ 时,  
 $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow 1.618$  黄金分割率

图4 斐波那契矩形和斐波那契螺旋

加一个正方形).如图4所示,阴影部分的矩形面积是多少?最外围的大矩形面积是多少?由此你可以猜想到什么结论?若从内到外依次连接通过小正方形的四分之一圆弧,能得到什么样的奇观?

师生活动:学生独立思考后,小组展开互学互助.

引导学生推广“用不同的方法计算每次所得矩形的面积”得到的等式,归纳出斐波那契数列的又一个性质: $F_1^2+F_2^2+F_3^2+\dots+F_n^2=F_n F_{n+1}$ .

师:(PPT展示)从内到外依次连接通过小正方形的四分之一圆弧,能得到一条螺旋线,被称为斐波那契螺旋.

师:欣赏视频,向日葵的两组交错的螺旋结构、鹦鹉螺的螺旋结构等,动态感受自然界中动植物与斐波那契数列的联系,体验斐波那契数列的自然美.

**设计意图** ACT-R理论把陈述性知识看成信息块,通过主动探索,从陈述性知识向程序性知识过渡,激活信息块,顺利提取产生式规则;从“形”的角度继续探究斐波那契数列与黄金分割之间的关系,以形助数,发现新性质;以数释形,用数学符号语言表达图形隐含的规律.

**环节5 悟斐波那契数列之应用美.**

**例题** 已知斐波那契数列1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...

(1) $a_1+a_3+a_5+\dots+a_{201}$ 是斐波那契数列中的第\_\_\_\_\_项;

(2) $1+a_2+a_4+a_6+\dots+a_{2022}$ 是斐波那契数列中的第\_\_\_\_\_项.

**设计意图** ACT-R理论倡导“精致练习”,激活产生式规则和信息块;例题设置意在巩固斐波那契数列的性质和递推公式,让学生感悟数学是

现实的、有用的。

### 环节6 聚课堂之髓。

师:本节课我们学习斐波那契数列经历了怎样的过程?请同学们完成相应的学习成果报告。(报告内容见表2)

**设计意图** ACT-R理论认为,这正是程序性目标和信息块的基础上形成的自动化阶段,即迁移数学能力,总结活动经验,总结研究方法,构建知识网络,培养数学交流和表达能力。

## ACT-R理论对数学探究活动教学的启示

ACT-R理论倡导将复杂的数学问题简单化,强调精致练习,提倡重视两类知识的获得和迁移等,为数学探究活动提供了丰富的、可借鉴的教育理论,为数学探究教学设计提供了强有力的支撑,也是落实数学探究活动的一种重要途径。

### 1. 情境直观化,促进陈述性知识的获得

数学探究活动是让学生在问题情境中经历发现问题,进而生成问题解决方式的过程<sup>[6]</sup>。ACT-R理论认为陈述性知识的获得有被动接受和主动建构两种方式,并不是所有的新课引入都能吸引学生的注意力,创设适当的情境有助于学生尽快地进入学

习状态。新课引入要遵循直观化原则,主要从两个方面入手:数学史和实际需要。引入数学史的目的是让学生知道知识的出处,了解数学家的故事,激发他们学好数学的信心等非智力因素;实例引入要贴合学生固有的生活常识,而不是直接讲述某一知识点让学生记忆,要注意内容大于形式。ACT-R理论的一个基本观点是学习能力的提高可以通过简单的环节来实现,与现实生活联系后再引入新的知识点的过程,可以促进陈述性知识的获得。

### 2. 目标层级化,触发程序性知识的产生

数学探究活动是基于问题情境开展自主探究、合作探究并最终解决问题的过程,就是程序性知识的获取过程。ACT-R理论认为程序性知识的获取关键在于产生式规则的获得。产生式主要依靠两个条件,一是需要一个处理某个具体目标的情境;二是需要一个处理类似目标的样例。在学习与问题解决的过程中,每一个知识目标都被分解为一连串的子目标,而这些子目标又被分解为一连串的更小的子目标,通过目标层级分解使得产生式被触发,从而不断深入和把握原有知识结构,以便学习新的知识,完成新的经验块,产生更多的迁移能力,以程序化的形式固定下来。

### 3. 练习精致化,促进自动化技能的形成

数学探究活动中复杂问题的解决,都需要基本技能的流畅性。ACT-R理论认为“熟能生巧”,“熟”是提高陈述性知识激活水平和产生式强度的必要条件,即知识从陈述性转变为程序性的过程中,练习发挥着举足轻重的作用,通过大量的精致练习,动作和条件之间的反应时间大大缩短,它们之间的匹配度得到提高,程序性知识会更加自动化,ACT-R理论实际上也是“做中学”和“例中学”的理论。

本节课基于ACT-R理论的斐波那契数列教学设计,以发现斐波那契数列通项公式及其性质为主线,通过“情境背景—设计方案—小组合作—推进方案—形成成果”这一由陈述性知识转化为程序性知识的过程,促进学生敢于质疑、善于合作、勇于创新,而这恰恰是数学探究活动的价值所在。

#### 参考文献:

- [1] 顾泠沅,鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海:上海教育出版社,2009.
- [2] 约翰·安德森. 认知心理学[M]. 杨清,张述祖,译. 长春:吉林教育出版社,1989.
- [3] 曾海英. 初中数学教科书中的数学探究活动分析[J]. 数学教学研究, 2016,35(08):10-15+20.
- [4] 刘伟. 基于ACT-R理论的初中数学概念课教学设计研究[D]. 上海师范大学,2014.
- [5] 叶宏秀,张贤金. 指向核心素养的微型项目化学习\*——以“粗盐的精制”的教学为例[J]. 化学教与学,2022(11):59-62.
- [6] 靳玉乐. 探究教学论[M]. 重庆:西南师范大学出版社,2000.

表2 学习成果报告

报告名称	报告内容	报告时间	学生自评	教师评语	评价等第
斐波那契数列学习成果报告	梳理本节课斐波那契数列的学习过程				
	本节课你提出并解决了几个问题?是如何解决的?在小组合作和交流过程中,你得到了怎样的启发?				
	你对数学与生活的联系,数学在解决实际问题中的作用有何体会?写出本节课你的收获,你还有哪些困惑?				
	自我评价本节课的学习过程和学习成果				