## 7.2.3　三角函数的诱导公式

## 第1课时　诱导公式(一)

[学习目标]　1.借助圆的对称性理解诱导公式一、二、三、四的推导过程.2.掌握诱导公式一*~*四并能运用诱导公式进行求值、化简与证明.

导语

在初中我们学习了一些锐角的三角函数值,现在我们把角扩展到了任意角,我们是否可以把任意角的三角函数值转化为求0°*~*360°角的三角函数值?对于90°*~*360°角的三角函数值,我们能否进一步把它们转化到锐角范围内来求解,这是我们今天要解决的内容.

一、诱导公式一*~*四

问题1　终边相同的角的三角函数值有何关系?

提示　由三角函数的定义,可以知道,终边相同的角的同一三角函数的值相等,即sin(*α*+2*k*π)=sin *α*, cos(*α*+2*k*π)=cos *α*,tan(*α*+2*k*π)=tan *α*,其中*k*∈**Z**.

问题2　观察下图,思考我们是如何定义三角函数的?



提示　三角函数的定义核心是角的终边与单位圆的交点的坐标,终边相同的角的三角函数值相等.由图象可知,点*P*1与*P*2关于原点对称,点*P*1与*P*2两点的横坐标、纵坐标分别互为相反数,以*OP*2为终边的角*β*可以表示成*β*=(π+*α*)+2*k*π,*k*∈**Z**.

问题3　知道了终边与单位圆的交点坐标,你能根据三角函数的定义探究角*α*与角π+*α*的三角函数值之间的关系吗?

提示　设角*α*的终边与单位圆交于点*P*1(*x*,*y*),则角π+*α*的终边与单位圆的交点为*P*2(-*x*,-*y*),根据三角函数的定义可知,*y*=sin *α*,*x*=cos *α*,=tan *α*(*x*≠0),sin(π+*α*)=-*y*=-sin *α*,cos(π+*α*)=-*x*=-cos *α*,tan(π+*α*)==tan *α*.

知识梳理

公式一*~*四

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 终边关系 | 图示 | 公式 |
| 公式一 | 角2*k*π+*α*与角*α*的终边相同 |  | sin(*α*+2*k*π)=sin *α*,  cos(*α*+2*k*π)=cos *α*,  tan(*α*+2*k*π)=tan *α*,  其中,*k*∈**Z** |
| 公式二 | 角-*α*与角*α*的终边关于*x*轴对称 |  | sin(-*α*)=-sin *α*,  cos(-*α*)=cos *α*,  tan(-*α*)=-tan *α* |
| 公式三 | 角π-*α*与角*α*的终边关于*y*轴对称 |  | sin(π-*α*)=sin *α*,  cos(π-*α*)=-cos *α*,  tan(π-*α*)=-tan *α* |
| 公式四 | 角π+*α*与角*α*的终边关于原点对称 |  | sin(π+*α*)=-sin *α*,  cos(π+*α*)=-cos *α*,  tan(π+*α*)=tan *α* |

注意点:

(1)函数名称不变;

(2)运用公式时把*α*“看成”锐角;

(3)诱导公式中角*α*可以是任意角,要注意正切函数中要求*α*≠*k*π+,*k*∈**Z**.

二、给角(值)求值

角度1　给角求值

例1　求下列三角函数值:

(1)cos(-480°)+sin210°;

(2)sin·cos ·tan .

解　(1)原式=cos480°+sin(180°+30°)

=cos(360°+120°)-sin30°=cos120°-

=cos(180°-60°)-

=-cos60°-=--=-1.

(2)原式=sin·cos·tan

=sin ·cos·tan

=sin·cos ·tan

=-sin ·cos ·tan

=-××=-.

反思感悟　利用诱导公式求任意角三角函数值的步骤

(1)“负化正”——用公式一或二来转化.

(2)“大化小”——用公式一将角化为0°到360°间的角.

(3)“小化锐”——用公式三或四将大于90°的角转化为锐角.

(4)“锐求值”——得到锐角三角函数后求值.

角度2　给值求值

例2　(1)(多选)已知cos(π-*α*)=-,则sin(-2π-*α*)的值是(　　)

A. B.-

C.- D.

答案　AB

解析　因为cos(π-*α*)=-cos *α*=-,

所以cos *α*=,

所以*α*为第一或第四象限角,

所以sin *α*=±=±,

所以sin(-2π-*α*)=sin(-*α*)=-sin *α*=±.

(2)已知cos=,则cos=　　　　.

答案　-

解析　cos=cos

=-cos=-.

延伸探究

1.若本例(2)中的条件不变,如何求cos?

解　cos=cos

=cos

=cos=.

2.若本例(2)条件不变,求cos-sin2的值.

解　因为cos=cos

=-cos=-,

sin2=sin2

=1-cos2

=1-=,

所以cos-sin2=--

=-.

反思感悟　解决条件求值问题的策略

(1)解决条件求值问题,首先要仔细观察条件与所求式之间的角、函数名称及有关运算之间的差异及联系,用已知角表示待求角.

(2)可以将已知式进行变形向所求式转化,或将所求式进行变形向已知式转化.

跟踪训练1　(1)sin+tan-cos=　　　　.

答案　0

解析　原式=sin+tan-cos

=sin +tan-cos

=sin -tan +cos

=-1+=0.

(2)已知sin(π+*α*)=,且*α*是第四象限角,则cos(*α*-2π)的值是(　　)

A.- B.

C.± D.

答案　B

解析　由sin(π+*α*)=,得sin *α*=-,

而cos(*α*-2π)=cos *α*,且*α*是第四象限角,

所以cos *α*==.

三、利用公式进行化简

例3　化简:(1);

(2).

解　(1)=

===1.

(2)原式=

===-1.

反思感悟　三角函数式化简的常用方法

(1)利用诱导公式,将任意角的三角函数转化为锐角三角函数.

(2)切化弦:一般需将表达式中的正切函数转化为正弦、余弦函数.

(3)注意“1”的代换:1=sin2*α*+cos2*α*=tan.

跟踪训练2　tan(5π+*α*)=*m*,则的值为(　　)

A. B.

C.-1 D.1

答案　A

解析　因为tan(5π+*α*)=tan *α*=*m*,

所以原式=====.

D:\杂\word图标\word图标\课堂小结通.tif

1.知识清单:

(1)特殊关系角的终边对称性.

(2)诱导公式一*~*四及其应用.

2.方法归纳:函数名不变,符号看象限.

3.常见误区:诱导公式中函数前面符号的确定.



1.sin780°+tan240°的值是(　　)

A. B.

C.+ D.-+

答案　A

解析　sin780°+tan240°

=sin60°+tan(180°+60°)

=+tan60°=+=.

2.已知sin(π+*α*)=,且*α*是第四象限角,那么cos(*α*-π)的值是(　　)

A. B.-

C.± D.

答案　B

解析　因为sin(π+*α*)=-sin *α*=,

所以sin *α*=-.

又*α*是第四象限角,所以cos *α*=,

所以cos(*α*-π)=cos(π-*α*)=-cos *α*=-.

3.化简:·tan(2π-*α*)=　　　　.

答案　-1

解析　原式=·tan(-*α*)

=·(-tan *α*)

=-·tan *α*

=-1.

4.的值等于　　　　.

答案　-2

解析　原式=

=

==

=-2.

## 课时对点练　[分值:100分]

单选题每小题5分,共30分;多选题每小题6分,共18分



1.sin240°+cos(-150°)的值为(　　)

A.- B.-1

C.1 D.

答案　A

解析　原式=sin(180°+60°)+cos150°

=-sin60°+cos(180°-30°)

=-sin60°-cos30°

=--=-.

2.(多选)已知sin(π-*α*)=,则cos(*α*-2022π)的值为(　　)

A. B.-

C. D.-

答案　AB

解析　sin(π-*α*)=,∴sin *α*=,

cos(*α*-2022π)=cos *α*=±

=±.

3.在△*ABC*中,cos(*A*+*B*)的值等于(　　)

A.cos *C* B.-cos *C*

C.sin *C* D.-sin *C*

答案　B

解析　由于*A*+*B*+*C*=π,

所以*A*+*B*=π-*C*.

所以cos(*A*+*B*)=cos(π-*C*)=-cos *C*.

4.(多选)已知tan *θ*=3sin(*θ*-π),则cos *θ*可等于(　　)

A.-1 B.-

C. D.1

答案　ABD

解析　∵tan *θ*=3sin(*θ*-π),∴=-3sin *θ*,

若sin *θ*=0,则cos *θ*=1或-1,

若sin *θ*≠0,则cos *θ*=-.

5.已知cos(508°-*α*)=,则cos(212°+*α*)等于(　　)

A.- B.

C.- D.

答案　B

解析　方法一　因为cos(508°-*α*)

=cos(360°+148°-*α*)=cos(148°-*α*)=,

所以cos(212°+*α*)=cos(360°+*α*-148°)

=cos(*α*-148°)=cos(148°-*α*)=.

方法二　cos(212°+*α*)=cos[720°-(508°-*α*)]

=cos(508°-*α*)=.

6.已知sin(-π-*α*)=,且*α*为第二象限角,则等于(　　)

A.- B.

C. D.-

答案　A

解析　∵sin(-π-*α*)=,

∴-sin(π+*α*)=,∴sin *α*=,

∵*α*为第二象限角,∴cos *α*=-,

==cos *α*=-.

7.(5分)计算:sincos=　　　　.

答案

解析　原式=-sincos

=-sin=sin·cos=.

8.(5分)已知sin=,则sin=　　　,cos·cos=　　　　.

答案　-

解析　sin=sin

=-sin=-,

cos·cos

=cos·cos

=cos2=1-sin2=.

9.(10分)化简:(1);(5分)

(2).(5分)

解　(1)

=

==-cos2*α*.

(2)

==-cos *α*.

10.(10分)已知*f*(*α*)=.

(1)化简*f*(*α*);(3分)

(2)若*α*是第三象限角,且sin(*α*-π)=,求*f*(*α*)的值;(3分)

(3)若*α*=-,求*f*(*α*)的值.(4分)

解　(1)*f*(*α*)=-

=-cos *α*.

(2)∵sin(*α*-π)=-sin *α*=,

∴sin *α*=-.

又*α*是第三象限角,

∴cos *α*=-,∴*f*(*α*)=.

(3)∵-=-6×2π+,

∴*f*=-cos

=-cos=-cos=-.



11.若*a*=20230.22,*b*=sinπ,*c*=log20230.22,则(　　)

A.*c*<*a*<*b* B.*b*<*a*<*c*

C.*b*<*c*<*a* D.*c*<*b*<*a*

答案　D

解析　由题意得*c*=log20230.22<log20231=0,

*a*=20230.22>20230=1,

*b*=sinπ=sin=sin∈(0,1),

所以*c*<*b*<*a*.

12.(多选)已知*A*=+(*k*∈**Z**),则*A*的值是(　　)

A.-1 B.-2

C.1 D.2

答案　BD

解析　当*k*=2*n*,*n*∈**Z**时,

*A*=+

=+=2,

当*k*=2*n*+1,*n*∈**Z**时,

*A*=+

=+

=-2.

13.已知函数*f*(*x*)=为奇函数,则*a*等于(　　)

A.-1 B.

C.- D.1

答案　D

解析　函数的定义域为{*x*|*x*≠-1且*x*≠*a*}.

因为*f*(*x*)=为奇函数,所以定义域关于原点对称,则*a*=1,

所以*f*(*x*)==,

因为*f*(-*x*)===-*f*(*x*),满足*f*(*x*)为奇函数,所以*a*=1.

14.(5分)已知*a*=tan,*b*=cos,*c*=sin,则*a*,*b*,*c*的大小关系是　　　　.(用“>”表示)

答案　*b*>*a*>*c*

解析　因为*a*=-tan=-,

*b*=cos=cos=,

*c*=sin=-sin=-,

所以*b*>*a*>*c*.



15.(5分)设函数*f*(*x*)=*a*sin(π*x*+*α*)+*b*cos(π*x*+*β*),其中*a*,*b*,*α*,*β*都是非零实数,且满足*f*(2023)=-1,则*f*(2024)的值为　　　　.

答案　1

解析　∵*f*(2023)=*a*sin(2023π+*α*)+*b*cos(2023π+*β*)=-1,

∴*f*(2024)=*a*sin(2024π+*α*)+*b*cos(2024π+*β*)

=*a*sin[π+(2023π+*α*)]+*b*cos[π+(2023π+*β*)]

=-[*a*sin(2023π+*α*)+*b*cos(2023π+*β*)]=1.

16.(12分)在△*ABC*中,若sin(2π-*A*)=-sin(π-*B*),cos *A*=-cos(π-*B*),求△*ABC*的三个内角.

解　由题意得sin *A*=sin *B*,

cos *A*=cos *B*,

平方相加得2cos2*A*=1,cos *A*=±,

又因为*A*∈(0,π),

所以*A*=或.

当*A*=时,cos *B*=-<0,

所以*B*∈,

所以*A*,*B*均为钝角,不合题意,舍去.

所以*A*=,cos *B*=,

所以*B*=,

所以*C*=.

综上所述,*A*=,*B*=,*C*=.