江苏省仪征中学 2024-2025 学年度第一学期高三数学学科导学案

平面向量的综合应用

研制人：居璇　　审核人：冯杰

班级：__________姓名：___________学号：_________授课日期：

【课标要求】

1. 运用平面向量的数量积解决三角形中的相关问题；
2. 复杂情境下平面向量的数量积的计算；
3. 与数量积相关的最值与范围问题.

【基础训练】

1. 若 P 为△ABC 所在平面内一点，且$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}|$，则△$ABC$ 的形状为(　　).

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

2. 在△ABC 中，$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$，则△$ABC$ 的形状一定是(　　).

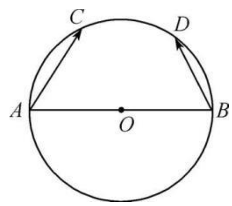
A. 等边三角形　　B. 等腰三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

3. 已知点 $M(1,0)$，A,B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}$的取值范围是(　　).

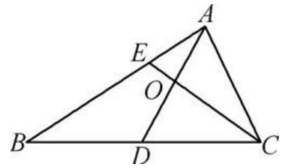
A. $[\dfrac{2}{3},1]$　　B. $[1,9]$　　C. $[\dfrac{2}{3},9]$　　D. $[\dfrac{\sqrt{6}}{3},3]$

4. 如图，C、D 是以 AB 为直径的圆 O 上的动点，已知$|AB|=2$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$的最大值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{5}$-$\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$-1



5．如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，$BE=2EA$，AD 与 CE 交于点 O.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则$\frac{AB}{AC}$的值是________.



【知识梳理】

1. 平面向量的线性运算
2. 平面向量基本定理
3. 平面向量的数量积

【例题精讲】

一、平面向量与解三角形

例 1.（多选）已知 O 为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta, -\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　　）

A. $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$　　　　B. $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　　　D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

变式　在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=k(k\in\mathrm{R})$.

(1) 判断△ABC 的形状;

(2) 若 $k=2$，求 b 的值.

二、平面向量与三角形的“四心” 问题

例 2. (1)已知O，N，P在△ABC所在平面内，满足$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\mathbf{0}$，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则点$O$，$N$，$P$依次为△$ABC$的(　　)

A.重心、外心、垂心　　　　B.重心、外心、内心

C.外心、重心、垂心　　　　D.外心、重心、内心

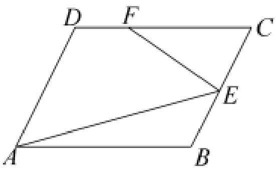
(2)在△ABC中，已知$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，则直线$AD$通过△$ABC$的(　　)

A.重心　　B.外心　　C.垂心　　D.内心

变式 已知A，B，C是平面内不共线的三点，O为坐标原点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}]$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则点$P$的轨迹一定经过(　　)

A.△ABC的内心　B.△ABC的垂心　C.△ABC的重心　D.AB边的中点

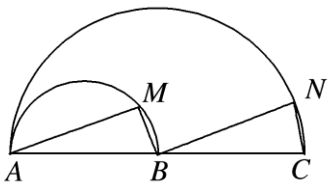
三、与平面向量相关的最值与范围



例 3. (1)如图，菱形$ABCD$，边长为6，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$.

则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}$的取值范围是________.

(2)如图，已知 $AC=2$，B 为 AC 的中点，分别以 AB，AC 为直径在 AC 同侧作半圆，M，N 分别为两半圆上的动点(不含端点 A，B，C)，且 $BM\perp BN$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最大值为________.



课堂小结